Programmation d'une Intelligence Artificielle : arbres ou apprentissage automatique

Représentation Matricielle des Graphes.

Paul Mangold

L3 MIASHS

19 Février 2021

Représentation Matricielle

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Pour simplifier, supposons que $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de numéroter les sommets.

La matrice d'adjacence de G est la matrice M dont les coefficients sont définis par

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i,j) \in E, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Représentation Matricielle

Matrice d'Adjacence

Par exemple :

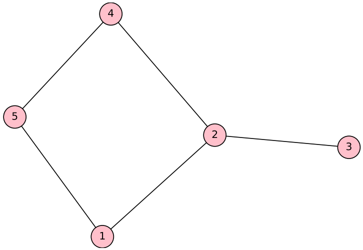


Figure: Graphe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure: Matrice d'Adjacence

Pour un graphe non orienté, cette matrice est symétrique, c'est à dire que la transposée M^T de M est égale à M.

Par exemple la matrice du graphe précédent est bien symétrique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans un graphe orienté, la matrice n'est pas symétrique.

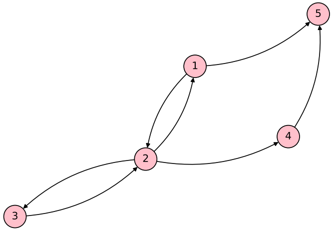


Figure: Graphe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure: Matrice d'Adjacence

On peut même mettre les poids des arêtes dans une matrice :

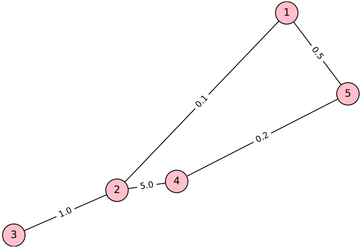
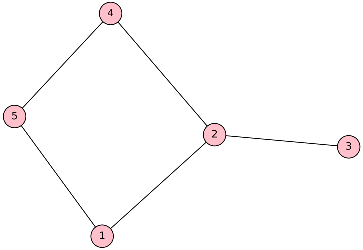


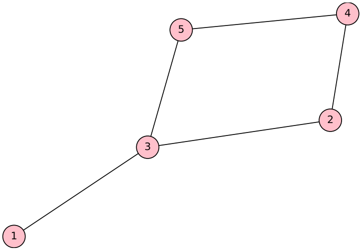
Figure: Graphe

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 1.0 & 5.0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure: Matrice d'Adjacence

On dit que deux graphes sont **isomorphes** s'il est possible d'en permuter les sommets pour qu'ils aient la même matrice d'adjacence :





La matrice d'adjacence d'un graphe complet est remplie de 1 :

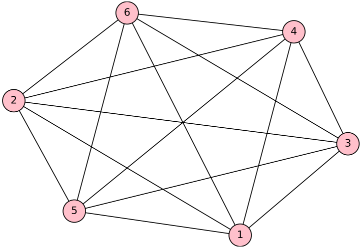


Figure: Graphe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure: Matrice d'Adjacence

On peut repérer les cliques dans la matrice d'adjacence :

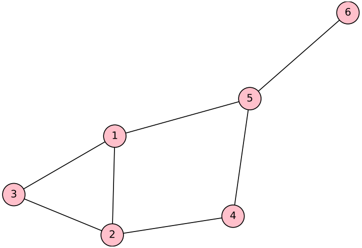


Figure: Graphe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure: Matrice d'Adjacence

En fait, le graphe est seulement isomorphe à un graphe dont la matrice d'adjacence comporte ce type de bloc.

Itération de la Matrice d’Adjacence

Soient A et B deux matrices de tailles $n \times r$ et $r \times p$, alors le produit AB est la matrice dont les coefficients $(AB)_{i,j}$ sont :

$$\begin{aligned}(AB)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{r} A_{i,k} B_{k,j} \\ &= A_{i,1} B_{1,j} + A_{i,2} B_{2,j} + \cdots + A_{i,r} B_{r,j}.\end{aligned}$$

Pour un graphe G dont la matrice est M (de taille $n \times n$), $M_{i,j}$ vaut 1 si et seulement si il existe une arête entre les sommets i et j dans G.

Et, par définition du produit matriciel :

$$(M^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} M_{k,j}.$$

En fait, on parcourt tous les sommets k, et il y a deux possibilités :

- si il y a des arêtes entre i et k et entre k et j : $M_{i,k} M_{k,j} = 1$;
- sinon : $M_{i,k} M_{k,j} = 0$.

Donc, dans la formule :

$$(M^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} M_{k,j}.$$

Pour chaque chemin de sommet 2 reliant i et j en passant par k :

- (i, k) et (k, j) sont des arêtes de G ;
- donc $M_{i,k} = M_{k,j} = 1$;
- donc $M_{i,k} M_{k,j} = 1$.

Donc $(M^2)_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur 2 entre les sommets i et j dans G.

Au lieu de compter le nombre de chemins, on peut se demander **s'il existe un chemin** entre les sommets.

Compter tous les chemins est alors inutile...

On peut utiliser des matrices dont les coefficients sont des booléens (*Vrai* ou *Faux*), où l'on représente *Vrai* par un 1 et *Faux* par un 0 :

$$\begin{pmatrix} \mathit{Faux} & \mathit{Vrai} & \mathit{Faux} & \mathit{Faux} \\ \mathit{Vrai} & \mathit{Faux} & \mathit{Vrai} & \mathit{Faux} \\ \mathit{Faux} & \mathit{Vrai} & \mathit{Faux} & \mathit{Vrai} \\ \mathit{Faux} & \mathit{Faux} & \mathit{Vrai} & \mathit{Faux} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On dira que cette matrice est booléenne.

La somme de deux matrices booléennes est alors un “ou” :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et le produit matriciel est, pour A et B deux matrices booléennes de tailles $n \times r$ et $r \times p$:

$$(AB)_{i,j} = \begin{cases} Vrai, & \text{s'il existe } k \text{ tel que } A_{i,k} \text{ et } B_{k,j} \text{ sont vrais} \\ Faux, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut considérer la matrice d'adjacence d'un graphe comme une matrice booléenne.

Dès lors, le coefficient (i, j) de la matrice booléenne M^2 vaut *Vrai* s'il existe un chemin de longueur 2 entre i et j.

TD

TD

On va essayer de faire un TD, dont le but est :

- de s'intéresser à l'existence de chemins ;
- de trouver un algorithme efficace de recherche de composantes connexes ;
- de faire le lien entre les puissances de la matrice d'adjacence d'une matrice et le nombre d'arêtes et de triangles dans un graphe.