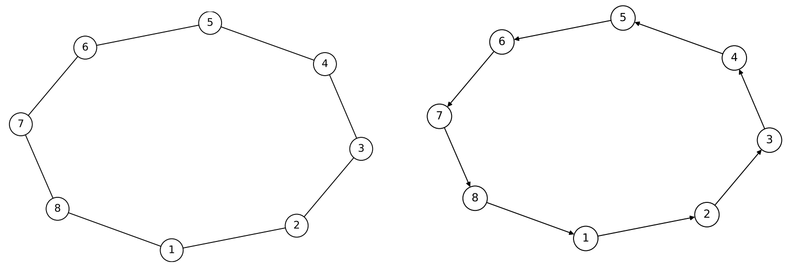
TD1: Matrices d'Adjacence

Exercice 1

1. (a) Donner la matrice d'adjacence des deux graphes suivants :



   (b) En observant la matrice des graphes ci-dessus, quelle est la forme des matrices d'un graphe cyclique non orienté à n sommets ?

2. Dessiner le graphe correspondant à la matrice suivante. Est-il orienté ou non ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit M la matrice booléenne d'adjacence d'un graphe non orienté $G = (V, E)$, c'est à dire que

$$M_{i,j} = \begin{cases} Vrai, & \text{si } (i,j) \in E \\ Faux, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. On s'intéresse à l'existence de chemins de longueur k dans le graphe G.

   (a) Calculer M^2 et M^3 pour la matrice M suivante (on représente $Vrai$ par un 1 et $Faux$ par un 0):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Remarque : c'est une matrice booléenne, donc le produit fonctionne comme un produit matriciel classique, sauf que les coefficients finaux doivent être des 0 ou des 1, car ils représentent des booléens ("Vrai" ou "Faux").

   (b) Montrer que le nombre $(M^2)_{i,j}$, coefficient d'indices (i, j) de la matrice M^2 vaut $Vrai$ s'il existe un chemin de longueur 2 entre les sommets i et j et $Faux$ sinon.

   (c) Montrer par récurrence que le coefficient $(M^k)_{i,j}$ vaut $Vrai$ s'il existe un chemin de longueur k entre les sommets i et j, et $Faux$ sinon.

2. Posons $B_k = I + M + M^2 + \cdots + M^k$, où l'opérateur + est à interpréter comme un "ou".

   I est la matrice identité qui contient des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

(a) Calculer B_1, B_2 et B_3 pour la matrice de la question 1. Que remarquez vous ?

(b) Déduire de la question 1 que le coefficient (i, j) de B_k vaut $Vrai$ s'il existe un chemin de longueur inférieure à k entre les sommets i et j dans G.

(c) On admet que la suite des matrices B_k admet une limite, c'est à dire qu'à partir d'une certaine valeur de k, toutes les matrices B_k sont égales à une matrice B.

Expliquer comment cette matrice B permet de trouver les composantes connexes de G.

3. (Bonus)

(a) Montrer l'identité suivante pour les matrices booléennes :

$$(I + M)^k = I + M + M^2 + \cdots + M^k$$

(b) Soit C_k la suite définie par récurrence par :

- $C_0 = I + M$;
- $C_{k+1} = (C_k)^2$.

Montrer que cette suite converge vers la matrice limite B de la question précédente.

(c) Combien d'itération faut-il à la suite C_k pour converger vers B ? En déduire un algorithme efficace de calcul des composantes connexes d'un graphe.

Exercice 3

Pour une matrice carrée $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on définit la trace comme la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i}.$$

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et M sa matrice d'adjacence (pas booléenne cette fois !).

1. Montrer que $\mathrm{tr}(M^2)$ vaut $2|E|$, où $|E|$ est le nombre d'arêtes dans le graphe.
2. Montrer que $\frac{\mathrm{tr}(M^3)}{6}$ est le nombre de triangles dans le graphe.
3. Expliquer pourquoi $\frac{\mathrm{tr}(M^4)}{24}$ n'est pas le nombre de quadrilatères du graphe.