apperemment on peut utiliser la décomposition de Frobenius et c'est plus "simple".

THEORÈME DE BRAUER.

Leçons : 101, 105, 108

Références : Objectif agrégation, V. Beck..

Théorème

Soit k un corps de caractéristique nulle
$n \in \mathbb{N}^*$
$\sigma, \tau \in S_n$

Alors σ et τ sont conjuguées si et seulement si P_σ et P_τ sont semblables.

Où, pour $\sigma \in S_n$, $P_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Résumé

On va montrer que :

$\Rightarrow$ I - Si $\sigma = \gamma^{-1}\tau\gamma$ alors $P_\sigma = P_\gamma^{-1} P_\tau P_\gamma$.

$\Leftarrow$ II - On pose $c_k(\sigma)$ = le nombre de cycles de longueur k dans σ.

LEMME Alors σ et τ sont conjuguées si et seulement si $\left(c_k(\sigma)\right)_{1 \leq k \leq n} = \left(c_k(\tau)\right)_{1 \leq k \leq n}$.
(on n'a besoin que de $\Leftarrow$).

III - Si $P_\sigma = \Pi^{-1} P_\tau \Pi$, alors $\chi_{P_\sigma} = \chi_{P_\tau}$, et l'étude des racines PRIMITIVES m-ièmes de l'unité donne $\sum_{m|k} c_k(\sigma) = \sum_{m|k} c_k(\tau)$ pour tout $m \geq 1$.

IV - L'égalité de III donne $C(\sigma) = C(\tau)$.

I) $\sigma \to P_\sigma$ est un morphisme donc $P_\sigma = P_{\gamma^{-1}\tau\gamma} = P_\gamma^{-1} P_\tau P_\gamma$.

(Car si $u_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{mat}_{B_c}(u_\sigma) = P_\sigma$ alors $\mathrm{mat}_{B_c}(u_\sigma \cdot u_\tau) = P_{\sigma\tau}$
car $u_\sigma \circ u_\tau(e_i) = u_\sigma(e_{\tau(i)}) = e_{\sigma\circ\tau(i)} = u_{\sigma\circ\tau}$.)

III On note $C(\sigma) = (C_k(\sigma))_{1 \leq k \leq n}$.

$\Rightarrow$ • Si $\sigma = \gamma^{-1} \tau \gamma$, on a $\tau = \tau_1 \cdots \tau_r$ où τ_i sont des cycles à sup. disjoints.

Dès lors $\sigma = \underbrace{\gamma^{-1} \tau_1 \gamma}_{= \sigma_1} \underbrace{\gamma^{-1} \tau_2 \gamma}_{\sigma_2} \cdots \underbrace{\gamma^{-1} \tau_r \gamma}_{\sigma_r}$

• Les τ_i et σ_i sont des cycles de la même longueur et $C(\sigma) = C(\tau)$.

$\Leftarrow$ • Si $C(\sigma) = C(\tau)$, on a alors une partition $m_1, \dots, m_r$ de n associée à σ et τ.

et $\sigma = (i_{1,1}, \dots, i_{1,m_1}) \cdots (i_{r,1}, \dots, i_{r,m_r})$

$\tau = (j_{1,1}, \dots, j_{1,m_1}) \cdots (j_{r,1}, \dots, j_{r,m_r})$

• Posons alors γ la permutation qui envoie $i_{k,p}$ sur $j_{k,p}$.

On a $\gamma \tau \gamma^{-1}(j_{k,p}) = \gamma \tau (i_{k,p}) = \gamma(i_{k,p+1}) = j_{k,p+1}$.

• Donc $\sigma = \gamma \tau \gamma^{-1}$.

III Supposons que $P_\sigma = \Pi^{-1} P_\tau \Pi$ avec $\Pi \in GL_n(k)$.

(1) • Alors $\chi_{P_\sigma} = \chi_{P_\tau}$.

• Et quitte à changer de bases,

$P_\sigma = \begin{pmatrix} M_{i_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Pi_{i_r} \end{pmatrix}$ où $M_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_i(k)$ est la matrice de permutation d'un cycle.

(et pareil pour P_τ).

Dès lors :

$$\prod_k \underbrace{(X^k - 1)}_{\chi_{\Pi_k}}{}^{C_k(\sigma)} = \prod_k (X^k - 1)^{C_k(\tau)} \quad \text{d'après (1)}.$$

• Soit alors α une racine PRIMITIVE de l'unité d'ordre m.

• Comme k est de caractéristique nulle, les racines de $T^k - 1$ sont simples, et donc la multiplicité d'α dans $T^k - 1$ est 1 si $m|k$ et 0 sinon.

• D'où $\sum_{m|k} C_k(\sigma) = \sum_{m|k} C_k(\tau)$ pour $m \geq 1$ (la somme porte bien sur k!) ens. fini !

IV • Enfin, s'il existe un entier m tel que $C_m(\sigma) \neq C_m(\tau)$, posons $m_0 = \max\{m \mid C_m(\sigma) \neq C_m(\tau)\}$

Comme les multiples de m_0 sont $\geq m_0$, $\sum_{m_0|k} C_k(\sigma) = \sum_{m_0|k} C_k(\tau)$ donne une contradiction et $C_{m_0}(\sigma) = C_{m_0}(\tau)$ donc σ et τ sont conjuguées.