THÉORÈME DE CARTAN-DIEUDONNÉ

Leçons 159, 170, 183

Référence Cognet, Algèbre bilinéaire p. 207

Tauvel, Géométrie p. 105

Théorème Cartan-Dieudonné vectoriel.

Soit E un $\mathbb{R}$-ev euclidien

$u \in O(E)$ une isométrie

$F_u = \text{Ker}(u - id_E)$ les points fixes de u.

On pose $p_u = n - \dim F_u$

Alors u est un produit de exactement p_u reflexions.

Théorème Cartan-Dieudonné affine.

Si $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E et f une isométrie affine de partie linéaire φ.

Alors

- si f a un point fixe, f est produit de exactement p_φ reflexions
- sinon f est produit de au plus $n+1$ reflexions.

I) Cas vectoriel

- si $p_u = 0$: $u = id$ qui est le produit de 0 reflexions.
- si $p_u = k+1 \geq 1$:

* on montre d'abord que u est le produit d'au plus p_u reflexions.

- u n'est pas l'identité car $F_u \neq E$

  donc $F_u^\perp$ n'est pas réduit à 0

  donc il existe $a \in F^\perp$ non nul.

- on va s'intéresser à l'élément $a - u(a)$ pour exhiber une isométrie sur laquelle on pourra utiliser notre hypothèse de récurrence :

  si $p_f = k$, c'est le produit de k reflexions

- d'abord, remarquons que la reflexion orthogonale $\sigma_{u(a)-a}$ "rajoute" un point fixe à u :

- $(u(a)+a, u(a)-a) = (u(a), u(a)) - (a,a) + (u(a), -a) + (a, u(a)) = 0$
- donc $2\sigma(u(a)) = \sigma(u(a)+a+u(a)-a)$

$$= \underbrace{u(a)+a}_{\text{invariant}} \; \underbrace{-\,u(a)+a}_{\text{reflechi}}$$
$$= 2a$$

ie $\sigma(u(a)) = a$.

- ensuite, F_u est stable par u

  donc $F_u^{\perp}$ est stable par u car u est une isométrie.

  $\rightarrow u(a) - a \in F_u^{\perp}$.

- dès lors, $\mathbb{R}(u(a)-a) \subseteq F_u^{\perp}$

  d'où $F_u \subseteq \mathbb{R}(u(a)-a)^{\perp} = F_{\sigma_{u(a)-a}}$ par définition !

On a donc montré que :

* $a \in F_{\sigma_{u(a)-a} \circ u}$
* $F_u \subseteq F_{\sigma_{u(a)-a} \circ u}$ (car alors composer par u ne change rien)

En outre :

$$p_{\sigma_{u(a)-a} \circ u} = n - \dim F_{\sigma_{u(a)-a} \circ u}$$
$$\leq n - \dim(F_u \oplus \mathbb{R}a)$$
$$= p_u - 1 = k.$$

Donc par hypothèse, $\sigma_{u(a)-a} \circ u$ est le produit de $p_{\sigma_{u(a)-a} \circ u}$ reflexions, donc en composant par σ à gauche on a :

u est le produit d'au plus $p_u = k+1$ reflexions.

* montrons ensuite que u est composé d'au moins p_u reflexions

- supposons $u = \sigma_{a_1} \circ \cdots \circ \sigma_{a_q}$ est le produit de q reflexions.
- dès lors, $\bigcap_{j=1}^{q} (\mathbb{R}a_j)^{\perp} \subseteq F_u$ (de dimension $n-k+1$)

mais $\bigcap (\mathbb{R}a_j)^{\perp} = (\text{Vect}\{a_j\}_j)^{\perp}$

dont la dimension est au moins $n-q$.

- on a donc

$$\dim F_u = n-k+1 \geqslant \dim \bigcap (\mathbb{R}a_j)^{\perp} \geqslant n-q$$

ie $q \geqslant k+1$ ce qui prouve le théorème.

II] • Si f a un point fixe O, alors, comme on a par I :

$\varphi = s_1 \circ \cdots \circ s_p$

Posons σ_i l'isométrie affine de partie linéaire s_i telle que $s_i(O) = O$, alors σ_i est une reflexion et :

$f = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_p$.

• Si f n'a pas de point fixe, on peut lui en créer un en la composant par la symétrie σ par rapport à l'hyperplan médiateur de $[O, f(O)]$ pour un certain $O \in \mathcal{E}$.

On a alors

$\sigma \circ f(O) = O$

Donc $\sigma \circ f$ a un point fixe, donc c'est le produit de $p_{\overrightarrow{\sigma \circ f}}$ reflexions, que l'on peut majorer par n, donc f est le produit d'au plus $n+1$ reflexions.