DIMENSION DU COMMUTANT

Leçons : 151, 162

Références : Algèbre 2, Francinou Gianella Nicolas

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque.

On a $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\chi_A = \mu_A$.

où $\mathcal{C}(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AX = XA\}$

Résumé

I - Montrer que si $\mu_A = \chi_A$, alors $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$.

II - Montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geq n$.

III - Montrer que si $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$, alors $\mu_A = \chi_A$.

I]

- On suppose que $\chi_A = \mu_A$.
- Il existe alors $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

  ⊛ pas du tout évident, on peut le prouver à la fin s'il reste du temps ?

- On pose alors

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ B & \longmapsto & Bx \end{array}$$

- f est * linéaire

  * injective car si $f(B) = 0$, alors $BA^k x = A^k Bx = A^k f(B) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}$, ce qui donne $B = 0$.

- On a donc $\dim \mathcal{C}(A) \leqslant \dim \mathbb{K}^n = n$.

- Or, d'une part $\mathbb{K}[A] \subseteq \mathcal{C}(A)$.
  d'autre part $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \mu_A = \deg \chi_A = n$.

- D'où $n = \dim \mathbb{K}[A] \leqslant \dim \mathcal{C}(A) \leqslant n$.
  soit $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$.

II | Montrons le lemme : $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$.

- $\mathcal{C}(A)$ est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène
  (S) $AX - XA = 0$. d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Quitte à se placer dans une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, on peut supposer que A est trigonalisable. Les dimensions des espaces solutions sur $\mathbb{L}$ et sur $\mathbb{K}$ sont encore les mêmes.

On a donc $A = PTP^{-1}$ où $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

(S) est équivalent à $PTP^{-1}X - XPTP^{-1} = 0$

soit $TP^{-1}XP - P^{-1}XPT = 0$.

On cherche donc une solution $X \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

La matrice $TX - XT$ est aussi triangulaire supérieure, on a donc au total $\frac{n(n+1)}{2}$ équations et autant d'inconnues.

Mais sur la diagonale, on a $a_{ii}x_{ii} - x_{ii}a_{ii} = 0$, ce qui est toujours vrai.

- Conclusion : on a $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues
  $\frac{n(n+1)}{2} - n$ équations

$\rightarrow$ l'espace $\mathcal{C}(A)$ des solutions est de dimension $\geqslant n$.

$\boxed{III}$ · Si on a, de plus, $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$, alors, comme

$$\deg \mu_A = \dim \mathbb{K}[A] \leq \deg \chi_A = n \leq \dim \mathcal{C}(A)$$

On a $\deg \mu_A = n$.

Mais $\mu_A \mid \chi_A$ et ils sont unitaires

Donc $\chi_A = \mu_A$.