DUNFORD ET L'EXPONENTIELLE DE MATRICES

Leçons 153, 156, 157.

Référence Gourdon p. 194-196.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)$ tels que

(i) d est diagonalisable, n est nilpotente.

(ii) $f = d+n$ et $d \circ n = n \circ d$.

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Enfin, cette décomposition permet de calculer l'exponentielle d'un endomorphisme !

Résumé

irréductibles !

I - Soit $F = \beta \Pi_1^{\alpha_1} \cdots \Pi_s^{\alpha_s}$ un polynôme annulateur de f.

Posons $N_i = \mathrm{Ker}\, \Pi_i^{\alpha_i}$, alors $E = \bigoplus N_i$ et la projection sur N_i par rapport à $\bigoplus N_{j \neq i}$ est un polynôme en f.

II — Preuve de Dunford et calcul pratique de la décomposition

III - Calcul de l'exponentielle de f.

I | • Posons $Q_i = \prod_{j \neq i} \Pi_j^{\alpha_j}$.

Aucun facteur n'est commun à tous les Q_i, le théorème de Bezout donne alors $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$1 = \mathcal{U}_1 Q_1 + \dots + \mathcal{U}_s Q_s$$

ie $$\mathrm{Id} = \mathcal{U}_1(f) \circ Q_1(f) + \dots + \mathcal{U}_s(f) \circ Q_s(f).$$

Posons alors $p_i = \mathcal{U}_i(f) \circ Q_i(f)$.

On a

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} Q_i Q_j(f) \circ \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j(f) = 0 & \text{si } i \neq j \\ \sum_{k=1}^{s} p_i \circ p_k = p_i \circ id = p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Donc les p_i sont bien des projecteurs !

- D'une part, on a $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$

$\subseteq$ car si $y = p_i(x) \in \mathrm{Im}\, p_i$, on a :

$$m_i^{\alpha_i}(f)(y) = m_i^{\alpha_i}(f) \circ Q_i(f) \circ \mathcal{U}_i(f) = 0$$

$\supseteq$ car si $x \in \mathrm{Ker}\, m_i^{\alpha_i}$, on a

$$x = p_1(x) + \dots + p_s(x) = p_i(x) \in \mathrm{Im}\, p_i.$$

on a en effet $p_j(x) = \mathcal{U}_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ car $m_i^{\alpha_i} \mid Q_j$ pour $i \neq j$.

- D'autre part, on a $\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$

$\subseteq$ car si $x \in \mathrm{Ker}\, p_i$, $x = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$.

$\supseteq$ car si $x \in N_j$ $(j \neq i)$, $p_i(x) = \mathcal{U}_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$

On a donc bien prouvé notre lemme, passons à Dunford.

II • Construisons d pour $\chi_f = (-1)^s \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et avec les notations du lemme, on peut poser

$$d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i \quad \text{et} \quad n = f - d = \sum (f - \lambda_i \mathrm{Id}) p_i.$$

$\rightarrow$ d est diagonalisable (par le lemme des noyaux par exemple)

$\rightarrow$ n est nilpotente car pour $q \in \mathbb{N}^*$,

$$n^q = \left(\sum_{i=1}^{s} (f - \lambda \mathrm{Id}) p_i \right)^q = \sum (f - \lambda \mathrm{Id})^q p_i$$

car $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$, $p_i^2 = p_i$, et p_i commute avec f.

- L'unicité vient du fait que si (d,n) et (d',n') sont deux décompositions, d et d' commutent (polynômes en f) donc sont diagonalisables simultanément donc $d - d' = n' - n$ est diagonalisable ~~donc~~ ~~et~~ nilpotente
  → donc nulle ! d'où l'unicité.

- Un mot sur comment trouver les U_i ?

La décomposition en éléments simples de $1/\chi_f$ s'écrit :

$$1/\chi_f = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{x_{ij}}{(X-\lambda_i)^j}$$

En posant $U_i = \sum_{j=1}^{\alpha_i} x_{ij}(X-\lambda_i)^{\alpha_i - j}$, on a :

$$1/\chi_f = \sum_{i=1}^{s} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{\alpha_i}}$$

d'où $1 = \sum_{i=1}^{s} U_i Q_i$ ce qui donne les p_i.

On est maintenant prêt·es pour calculer (enfin !) $\exp f$:

III] • On a $f = d+n$ où d et n commutent, d'où

$$\exp(d+n) = \exp(d)\exp(n).$$

On calcule alors :

$$\exp(d) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{d^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i^p}{p!} p_i = \sum_{i=1}^{s} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i^p}{p!} \cdot p_i = \sum_{i=1}^{s} \exp(\lambda_i) p_i$$

$$\exp(n) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{s} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!} \cdot p_i = \sum_{i=1}^{s} \sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!} p_i$$

Soit, en combinant les deux,

$$\exp f = \exp d \cdot \exp n = \sum_{i=1}^{s} \exp(\lambda_i) \left(\sum_{p=0}^{\alpha_i - 1} \frac{(f-\lambda_i Id)^p}{p!} \right) p_i .$$