Point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de GL(E)

Leçons 106, 203, 208, 170

Référence : Thèmes de géométrie, Alessandri.

Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé

G un sous-groupe compact de $GL(E)$.

Posons K un compact convexe non vide tel que

$\forall u \in G,\ u(K) \subseteq K$.

Alors il existe $x \in K$ tel que $\forall u \in G,\ u(x) = x$.

Corollaire

Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Résumé

I - Un théorème de point fixe linéaire : si $u(K) \subseteq K$, et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u a un point fixe.

II - Définition d'une norme invariante par composition par les éléments de G et construction d'un élément point fixe de tout sous ensemble fini de G.

III - Application aux sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

I | • Soit $x_0 \in K$, posons $x_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} u^i(x_0)$.

• Comme K est compact, pour $i \in \mathbb{N}$, $u^i(x_0) \in K$.

Donc par convexité de K, $x_n \in K$ pour tout $n \geqslant 0$.

• Il existe donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in K$.

Et on a, de plus, pour une norme quelconque de E :

$$\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| = \left\| \sum_{i=0}^{\varphi(n)-1} \frac{1}{\varphi(n)} \left(u^{i+1}(x_0) - u^i(x_0)\right) \right\|$$

$$= \frac{1}{\varphi(n)} \|u^{\varphi(n)}(x_0) - x_0\|$$

$$\leq \frac{M}{\varphi(n)} \xrightarrow{n\infty} 0 \quad \text{car } \varphi(n) \xrightarrow{n\infty} +\infty.$$

car K est un compact de $\mathbb{R}^n$ et est donc borné par un certain M.

Donc $\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n\infty} 0$.

Or par continuité de la norme et par continuité de u :

$$\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \longrightarrow \|u(x) - x\|$$

D'où $u(x) = x$: on a bien trouvé un point fixe.

II] • On va choisir une norme agréable :

$$N(x) = \max_{u\in G} \|u(x)\|.$$ bien définie par compacité de G.

• C'est bien une norme car :

* si $N(x) = 0$, comme $id \in G$, $\|id(x)\| = \|x\| = 0$ donc $x = 0$.

* si $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = \max \|u(\lambda x)\|$

$$= \max |\lambda| \|u(x)\|$$

$$= |\lambda| N(x)$$

* si $x, y \in E$, $N(x+y) = \max \|u(x) + u(y)\|$

$$\leq \max \|u(x)\| + \|u(y)\|$$

$$\leq \max \|u(x)\| + \max \|u(y)\|$$

$$= N(x) + N(y)$$

avec égalité s'il existe $u \in G$ tel que $\|u(x+y)\| = \|u(x)\| + \|u(y)\|$

ie $u(x) = \lambda u(y)$ $(\lambda > 0)$ donc $x = \lambda y$ par inversibilité de u.

• Posons ensuite $\mathrm{Fix}(u) = \{x \in K \mid u(x) = x\}$ les points fixes de u sur K.
On cherche un élément dans $\bigcap_{u \in G} \mathrm{Fix}(u)$.

Comme $\mathrm{Fix}(u)$ est fermé dans K, il suffit de trouver un élément dans une union finie de la forme $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Fix}(u_i)$ avec $u_i \in G$.

• Posons comme tout à l'heure : $u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i$.
Par convexité de K, $u(K) \subseteq K$.
Et comme u est linéaire, le lemme donne un point $x \in K$ tel que
$$x = u(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i(x).$$

Et c'est là toute la magie de notre norme :
$$\begin{aligned} N(x) &= N(u(x)) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} N(u_i(x)) \\ &= N(x) \end{aligned}$$

Par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, les $u_i(x)$ sont donc positivement liés.
$\longrightarrow$ l'égalité des normes donne dès lors $x = u(x) = \frac{1}{n} \sum u_i(x) = u_i(x)$
donc $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Fix}(u_i) \neq \emptyset$.

III| • Posons
$$\rho : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & GL(S_n(\mathbb{R})) \\ A & \longmapsto & (S \longmapsto AS\,{}^tA) \end{array}$$
où S est la forme quadratique associée à un espace quadratique euclidien $(\mathbb{R}^n, S)$.

ρ définit un morphisme de groupe car
$$\rho(A)(\rho(B)S) = A(BS\,{}^tB)\,{}^tA = (AB)S\,{}^t(AB) = \rho(AB).S.$$
et induit donc une action de G sur $S_n(\mathbb{R})$.

Posons $X = \{ A{}^tA = \rho(A) I_n \mid A \in G \}$ l'orbite de I_n par cette action
et $K = \mathrm{conv}(X)$ son enveloppe convexe.

* $X \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$
* X est compact (par continuité)
* $K \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$ par convexité de $S_n^{++}(\mathbb{R})$
* K est donc convexe et compact (car enveloppe convexe d'un compact)

~~Ainsi~~

Donc par le théorème de Kakutani, il existe $S \in K \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$
un point fixe de tous les éléments de $\rho(G)$.

Commentons le fait que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$:

* c'est la matrice d'une forme quadratique définie positive qui
induit une norme $\|\cdot\|_S : x \mapsto {}^tx S x$
dès lors si $A \in G$, $\|Ax\|_S = {}^tx {}^tA S A x = {}^tx {}^t(AS{}^tA) x = {}^tx S x = \|x\|_S$
ie G est un sous groupe des isométries de E pour $\|\cdot\|_S$.

* on peut écrire carrément $S = R^2$ car $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
et si $A \in G$, $AR^2\,{}^tA = R^2$ donc $(R^{-1}AR)(R\,{}^tA R^{-1}) = I_n$
$= (R^{-1}AR)\,{}^t(R^{-1}AR)$

donc $R^{-1}AR \in O_n(\mathbb{R})$

donc G est un sous-groupe de $R\,O_n(\mathbb{R})R^{-1}$.