NOMBRE DE MATRICES DIAGONALISABLES DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$.

Leçons 101, 123, 153, 190

Références H_2G_2 tome 1 p. 264-265 (p. 120 pour I).

FGN Alg 1 (1.10?)

En fait voir plutôt NH_2G_2, tome 2 p. 66.

Théorème

Le nombre de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ est

$$\sum_{n_1+\dots+n_q=n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

Résumé

I - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ est diagonalisable si et seulement si $A^q = A$.

II - On construit une bijection entre

$\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables

et $S = \{ (E_\xi, \xi \in \mathbb{F}_q) \mid E = \bigoplus_{\xi \in \mathbb{F}_q} E_\xi \}$ (avec éventuellement des $E_\xi = \{0\}$)

III - La formule des classes pour l'action naturelle de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur S permet alors de conclure.

I) • Si $A^q - A = 0$, $X^q - X$ annule A et est scindé à racines simples sur $\mathbb{F}_q$. En effet, pour tout $\xi \in \mathbb{F}_q$, $\xi^q = \xi$ est racine de $X^q - X$, on a donc q racines pour un polynôme de degré q.

Donc A est diagonalisable.

• Si A est diagonalisable, elle est semblable à $\mathrm{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$.
Dès lors A^q est semblable dans la même base à $\mathrm{diag}(\xi_1^q, \dots, \xi_n^q) = \mathrm{diag}(\xi_i)$

D'où $A^q = A$.

II • Posons $\varphi :$
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(E) & \longrightarrow & S \\ A & \longmapsto & (\mathrm{Ker}(A-\xi_1 I_n), \dots, \mathrm{Ker}(A-\xi_q I_n)) \end{array}$$
où l'on a écrit $\mathbb{F}_q = \{\xi_1, \dots, \xi_q\}$.

• D'après le lemme des noyaux, $\mathbb{F}_q^n = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}(A-\xi_i I_n)$
(quitte à enlever les ensembles réduits à zéro).

→ donc d'une part, φ est injective car la donnée des sous espaces propres de $A \in \mathcal{D}(E)$ la détermine.

→ d'autre part, φ est surjective car si $E = \bigoplus E_i$, l'endomorphisme défini par $f : x \mapsto \xi_i x$ pour $x \in E_i$ est bien défini et ~~est~~ diagonalisable.

III • $GL_n(\mathbb{F}_q)$ agit naturellement sur S en posant

$u \cdot (E_1, \dots, E_q) = (u(E_1), \dots, u(E_q))$. pour $u \in GL_n(\mathbb{F}_q)$, $E = \bigoplus E_i$.

La formule des classes s'écrit alors

$$|S| = \sum_{x \in S/GL(\mathbb{F}_q^n)} |\mathrm{Orb}_x| = \sum_{x \in S/GL(\mathbb{F}_q^n)} \frac{|GL(\mathbb{F}_q^n)|}{|\mathrm{Stab}_x|}.$$

• Regardons d'abord l'orbite de $(E_1, \dots, E_q) \in S$:

→ si $u \in GL(\mathbb{F}_q^n)$, on a bien $\dim u(E_i) = \dim E_i$.

→ si $(F_1, \dots, F_q) \in S$ $\dim E_i = \dim F_i$,
on peut prendre $(e_i)_i$ et $(f_i)_i$ des bases compatibles avec les décompositions de E.
Dès lors $u : e_i \mapsto f_i$ définit un endomorphisme (linéaire) qui envoie une base sur une base et est donc bijectif.

→ Les orbites de cette action sont donc déterminées par n_i tq $n_1 + \dots + n_q = n$.

• Pour dénombrer chacune des orbites, regardons le stabilisateur d'un élément $(E_1, \dots, E_q)$ de E donné.

On remarque que $u \in GL(E)$ stabilise $(E_1, \dots, E_q)$ si et seulement si $u(E_i) = E_i$.

La matrice de u dans une base compatible est donc de la forme

$$\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_q)$$

où A_i est la matrice de u restreint à E_i.

Comme u est inversible, A_i est inversible.

On en déduit que $|\mathrm{Stab}(E_1, \dots, E_q)| = \prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|$ où $n_i = \dim E_i$.

• En résumé, on a donc :

$$|\mathcal{D}(E)| = |S| = \sum_{n_1 + \dots + n_q = n} |\mathrm{Orb}(n_1, \dots, n_q)|$$

$$= \sum_{n_1 + \dots + n_p = n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$