Suite de Polygones.

Leçons : 152, 182

Références : Algèbre, X. Gourdon p. 180.

Théorème (déterminant circulaire)

• Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$

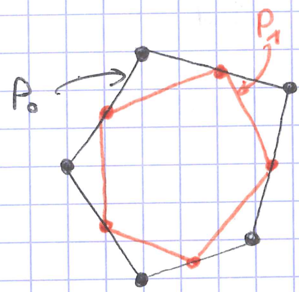
Le déterminant de A est $\prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$

où $P = a_n X^{n-1} + \dots + a_2 X + a_1$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Application

• Posons la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\right)^{\mathbb{N}}$ de polygones telle que :

$P_0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et $P_{k+1,i} = \frac{P_{k,i} + P_{k,i+1}}{2}$ pour $k \geqslant 0$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.



• Alors P_n converge vers le point

$g = \frac{1}{n} \sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_{0,i}$ l'isobarycentre des P_0.

Résumé

I – Diagonaliser A en l'exprimant comme $A = P(J)$.

II – Exprimer $\det(A)$

III – Exprimer la relation entre P_k et P_{k+1} sous forme matricielle.

IV – Écrire cette matrice comme un polynôme en J et en déduire son polynôme caractéristique et ses valeurs propres.

V – En déduire la convergence de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Thm I • Remarquons qu'itérer J décale la diagonale :

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & 1 & & 0 \\ 0 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$$

• On a donc, pour $P = a_n X^{n-1} + \dots + a_2 X + a_1$:

$$P(J) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & a_2 \\ a_2 & \cdots & & a_1 \end{pmatrix} = A.$$

• Mais on a aussi $J^n = I_n$ donc $\chi_J = X^n - 1$ est scindé à racines simples, et ses racines sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

• Donc J se diagonalise en $\Omega = \mathrm{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$, soit $P(J)$ se diagonalise en $P(\Omega) = \mathrm{diag}(P(1), \dots, P(\omega^{n-1}))$

II • D'où $\det A = \det P(J) = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$.

App III • Revenons à nos polygones, on va écrire $P_k = \begin{pmatrix} P_{k,1} \\ \vdots \\ P_{k,n} \end{pmatrix}$.

On a alors, pour $k \geqslant 0$:

$$P_{k+1} = A P_k, \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I_n + J).$$

IV • Intéressons nous à χ_A.

$$\chi_A = \det(X I_n - A) = \det\left(\left(X - \frac{1}{2}\right) I_n - \frac{1}{2} J\right)$$

$\rightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right) I_n - \frac{1}{2} J$ est un polynôme en J, donc d'après II :

(*) $$\chi_A = \prod_{j=0}^{n-1} \left(X - \frac{1+\omega^j}{2}\right).$$

• χ_A est scindé à racines simples, on peut donc diagonaliser A :

$$A = P \,\mathrm{diag}\left(1, \frac{1+\omega}{2}, \dots, \frac{1+\omega^{n-1}}{2}\right) P^{-1} \text{ où } P \in GL_n(\mathbb{C}).$$

quelle topologie ??

V • On a donc, par continuité du produit matriciel :

$$A^k \longrightarrow B = P\,\mathrm{diag}(1,0,\dots,0)\,P^{-1}.$$

• Pour g, on a le vecteur $\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ correspondant, invariant par A.

Donc $X = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ donne $AX = X$

et $BX = X$ par continuité.

Et comme $X \in \mathrm{Im}\, B$ de dimension 1,

$B = (b_1 X, \dots, b_n X)$ où $b_i \in \mathbb{C}$.

• Remarquons enfin que l'isobarycentre est préservé par A car :

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{1}{2}(P_i + P_{i+1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_i + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_{i+1}}_{=\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_i}\right).$$

... donc B le préserve également !.

• En somme : $P_k \xrightarrow{k\to+\infty} BP_0 = \left(\sum b_i P_{0,i}, \dots, \sum b_i P_{0,i}\right)$

donc $b_i = 1/n$ et $P_k \xrightarrow{k\to+\infty} (g, \dots, g)$.