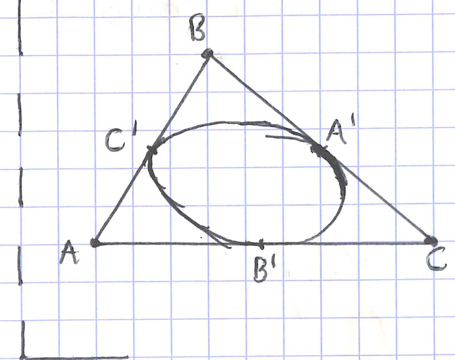
ELLIPSES DE STEINER

Leçons 182, 183

Référence NH2G2 tome 2 p. 180 pour l'existence

p. 202 pour l'unicité.

Théorème



- Soit ABC un triangle du plan.

I| Il existe une ellipse ~~Ai~~ tangente aux milieux des côtés de ABC.

II| Cette ellipse est unique.

0| Petites remarques sur le groupe affine $GA_2(\mathbb{R})$:

- les éléments $g \in GA_2(\mathbb{R})$ préservent les barycentres :

si $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ alors $\vec{g}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \overrightarrow{g(G)g(A_i)}$

$= \vec{g}(\vec{0})$

$= \vec{0}$

- $GA_2(\mathbb{R})$ agit simplement et transitivement sur les repères de $\mathcal{A}^2$.

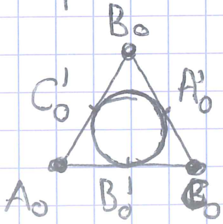
en effet, prenons (O, I, J) et (O', I', J') deux repères de $\mathcal{A}^2$,

on a $*$ $g(O) = g(O')$

$*$ $\vec{g}(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{O'I'}$ et $\vec{g}(\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{O'J'}$

or cela caractérise g complètement.

I| • Pour trouver notre ellipse, on va se ramener à un cas particulier simple : celui du triangle équilatéral.



Dans ce cas, le cercle inscrit correspond aux critères recherchés.

Mais alors on a deux repères du plan : (A_0, B_0, C_0) et (A, B, C).
Prenons alors $g \in GA_2(\mathbb{R})$ qui envoie le premier sur le deuxième.
(c'est plus simple d'envoyer l'équilatéral sur le quelconque !)

Deux remarques :

* les milieux sont envoyés sur les milieux (barycentres !).
* l'image du cercle par g est une conique compacte, c'est donc une ellipse.

• Et on garde les tangentes car g est différentiable, ce qui permet de calculer, pour un arc γ tangent à $\vec{AB}$ en 0 :

$$\begin{aligned}(g \circ \gamma)'(0) &= dg(\gamma(0))(\gamma'(0)) \\ &= \vec{g}(\vec{AB}) \\ &= \overrightarrow{g(A)g(B)}\end{aligned}$$

On a donc bien une ellipse tritangente au triangle ABC !

II| L'idée c'est de montrer qu'une ellipse tritangente à un triangle équilatéral, bah c'est en fait le cercle inscrit.

• on va partir dans l'autre sens : on envoie notre ellipse $\mathcal{E}$ sur un cercle $\mathcal{C}$ par un élément $g \in GA_2(\mathbb{R})$ tel que $g(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$.
Mais alors g envoie T sur $T' = g(T)$.
Supposons que T' est équilatéral, alors T et T' sont semblables, ce qui signifie que g est une similitude
$\longrightarrow$ dès lors $\mathcal{E} = g^{-1}(\mathcal{C})$ est en fait un cercle !

Assurons nous donc que T' est équilatéral !

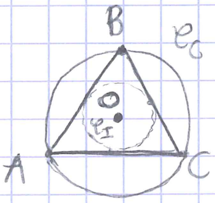
- les cercles inscrit $\mathcal{C}_I$ et circonscrits $\mathcal{C}_C$ de T' sont concentriques.
  - on a un triangle T' et un cercle tritangent à T', c'est donc le cercle inscrit de T' :

* CAR : par Pythagore, comme les rayons du cercle sont orthogonaux à la tangente au cercle, ce sont bien les plus courtes distances aux arêtes

$\longrightarrow$ dès lors, c'est bien un cercle dont le centre est équidistant des milieux des côtés du triangle : le cercle inscrit

$\Rightarrow$ les rayons de $\mathcal{C}$ sont donc bien les médiatrices des côtés donc ils définissent le centre de $\mathcal{C}_C$.

- si $\mathcal{C}_I$ et $\mathcal{C}_C$ sont concentriques, le triangle est équilatéral



- soit r la rotation qui envoie A sur B.

$\longrightarrow$ elle envoie AB sur BC car :

* A est envoyé sur B

* AB est tangente à $\mathcal{C}_I$ donc r(AB) aussi.

* $B \in r(AB)$ donc c'est soit AB soit BC $\rightarrow$ r(AB) = BC

* $B \in \mathcal{C}_C$ donc r(B) aussi $\rightarrow$ r(B) = C.

Donc r(A) = B, r(B) = C et on peut montrer de même r(C) = A

$\longrightarrow$ ABC est équilatéral, ce qui achève la preuve !