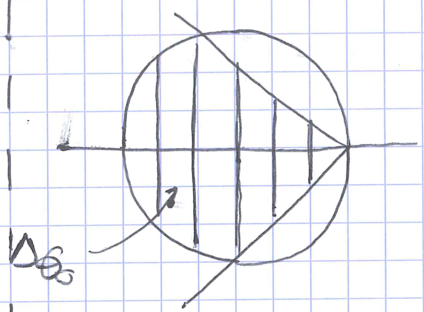
THEORÈME D'ABEL ANGULAIRE ET TAUBERIEN FAIBLE.

Leçons 230, 243

Référence Gourdon

Théorème (Abel angulaire)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge, on note f la somme de la série.



Soit $\theta_0 \in [0; \pi/2[$

$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \exists \rho > 0\ \exists \theta \in]-\theta_0; \theta_0[\ z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$

Alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Théorème (Taubérien faible)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f sur le disque unité.

Si $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$ existe et vaut S

$a_n = o(1/n)$

Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Résumé

I - Abel
- i - Transformation d'Abel pour exprimer $f(z) - S$
- ii - Majoration de $f(z) - S$
- iii - Un cas où la réciproque est fausse.

II - Tauber
- i - Calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - f(x)$
- ii - Majoration pour $x = 1 - \varepsilon/n$.

I / i Notations : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$R_n = S - S_n.$$

Remarque : $a_n = R_{n-1} - R_n$.

Calculons, pour $|z| < 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - S_N = \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) + \cancel{R_0 (z^0 - 1)} - R_N (z^N - 1)$$

$$= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)$$

Dès lors, $N \to +\infty$ donne :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

ii On sait que $R_n \to 0$.

Donc prenons $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n \right| + |z-1| \cdot \left| \sum_{n=N}^{+\infty} R_n z^n \right|$$

$$\leq |z-1| \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| |z|^n + |z-1| \sum_{n=N}^{+\infty} |R_n| |z|^n$$

$$\leq |z-1| \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| + \varepsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}.$$

* Dès lors, d'une part, si $z \in \Delta_{\theta_0}$, on a $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ où $\varphi \in]-\theta_0 ; +\theta_0[$

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2} (1+|z|)$$

$$= \frac{\rho}{1 - (1 - \rho \cdot 2\cos\varphi + \rho^2)} (1+|z|)$$

$$\leq \frac{2}{2\cos\varphi \cdot \rho}.$$

Or on va s'intéresser à $z \to 1$, on peut donc choisir $\rho \leq \cos\theta_0$:

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} = \frac{2}{\cos\theta_0}$$

* D'autre part, l'autre côté de la somme :
on peut choisir α tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N-1} |R_n| \leq \varepsilon$, il suffit alors de prendre $|z-1|<\alpha$.

$\to$ en résumé, si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leq \inf(\cos\theta_0, \alpha)$, on a

$$|f(z) - S| \leq \varepsilon + \frac{2}{\cos\theta_0}\varepsilon$$

d'où le résultat !

iii La réciproque est fausse ! Par exemple :

$$\lim_{\substack{z\to 1 \\ |z|<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \lim \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

Mais la série $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement...

$\to$ on va devoir rajouter une hypothèse

II | i Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, comme tout à l'heure.

On peut écrire, pour $N \in \mathbb{N}$, $x \in]0,1[$,

$$S_n - f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Mais remarquons que

$$(1-x^n) = (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) \leq k(1-x)$$

$n/N \;\; 1$ pour $n \geq N$

On peut donc majorer gentiment :

$$|S_N - f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n|a_n|}{N} x^n$$
$$\leq (1-x)\cdot \Gamma \cdot N + \frac{\sup_{n\geq N} n|a_n|}{N(1-x)}.$$

où Γ est un majorant de $(n|a_n|)$.

ii Faisons parler cette inégalité : soit $\varepsilon > 0$, $N \geq 1$, on a

$$\left| S_N - f(1-\varepsilon/N)\right| \leq \Gamma\varepsilon + \frac{\sup n|a_n|}{\varepsilon}$$

Mais alors la suite $n|a_n|$ tend vers 0 sans toucher le ε, en outre on peut supposer $\sup_{n\geq N_0} n|a_n| \leq \varepsilon^2$ pour un certain N_0.

On a alors bien sûr, pour $N \geq N_0$
$$|S_N - f(1-\varepsilon/N)| \leq (\Gamma+1)\varepsilon.$$

- Généralisons à $f(x)$:

$$|S_N - S| \leq |S_N - f(1-\varepsilon/N)| + |f(1-\varepsilon/N) - S|$$

On a déjà majoré le premier terme, pour $N \geq N_0$
Pour le deuxième, $f(x) \xrightarrow{x\to 1} S$ par hypothèse
donc il existe N_1 tel que $N \geq N_1$ donne $|f(1-\varepsilon/N) - S| \leq \varepsilon$

On a donc $|S_N - S| \leq (\Gamma+2)\varepsilon$ pour $N \geq \max(N_0, N_1)$.

Fonction $\mathcal{C}^\infty$ solution de $x^y = y^x$.

Leçon : 214

Références : Madère p. 119

Pommellet p. 291

Théorème

Pour $x, y \in \,]1 ; +\infty[$, l'équation $x^y = y^x$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ f telle que $y = f(x)$ et $f(x) \neq x$ si $x \neq e$.

Résumé

I – L'équation revient à $y \ln x = x \ln y$, on va donc étudier d'abord la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

II – On remarque que si $F(x,y) = x \ln y - y \ln x$, le théorème des fonctions implicites doit donner $y = f(x)$... sauf si $x = y = e$, où l'on a une branche $y = x$. (et ~~det~~ $d_y f(x,y) = 0$ ...)

$\longrightarrow$ on définit donc $\psi(x,y) = \frac{x \ln y - y \ln x}{x - y}$, et on montre qu'on peut la prolonger et que le théorème des fonctions implicites donne alors la solution.

III – Une idée de la tête de f ?

I/ • On a $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Ce qui nous permet d'écrire son tableau de variations :

x	1		e		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

On peut donc définir deux bijections en tronquant φ :

$g :]1, e[\longrightarrow]-\infty ; 1/e[$

$h :]e ; +\infty[\longrightarrow]0 ; 1/e[$

Cela nous donne une belle idée de qui est f :

$$f : \begin{array}{ccl}]1 ; +\infty[& \longrightarrow &]1 ; +\infty[\\ x & \longmapsto & \begin{cases} h^{-1} \circ g(x) & \text{si } x \in]e ; +\infty[\\ g^{-1} \circ h(x) & \text{si } x \in]1 ; e[\\ e & \text{si } x = e. \end{cases} \end{array}$$

II] • Que dire du caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f ?

Comme φ est $\mathcal{C}^\infty$ et que $\varphi'(x) \neq 0$ si $x \neq e$, ~~donc~~ les fonctions h et g sont $\mathcal{C}^\infty$ et leurs inverses aussi.

$\rightarrow$ dès lors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1 ; +\infty[\setminus \{e\}$.

On commence à cerner qu'il va y avoir de jolis problèmes en (e, e).

$\rightarrow$ on va ruser un peu en altérant $F(x,y) = x \ln y - y \ln x$ pour ne plus avoir cette histoire de dérivée en y nulle en (e,e).

Pour cela, posons, pour $x \neq y$:

$$\Psi(x,y) = \frac{x \ln y - y \ln x}{x - y}$$

Avec un peu de réécriture :

$$\Psi(x,y) = \ln(y) - y \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x}$$

$$= \ln(y) - \frac{y}{y-x} \int_x^y 1/t \, dt$$

$$= \ln(y) - y \int_0^1 \frac{1}{x + (y-x)t} dt.$$

Mais par un théorème d'intégration, cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[^2$, et on peut ainsi prolonger la fonction Ψ même pour $x=y$.

On a alors d'ailleurs $\Psi(x,x) = \ln(x) - 1$.

- Dès lors, dire que $\Psi = 0$ revient à dire que :

$x \neq y$ et $\Psi(x,y) = 0$

"$x = y$" et $\Psi(x,x) = 0$, ce qui donne $x = e$.

~~On a vu dans le premier cas que~~ $\cancel{\partial_y \Psi(x,y) \neq 0}$,
~~et dans le second cas, on a tout simplement~~ $\cancel{x = e}$.

Toutes ces propriétés sont carrément équivalentes d'où

$$\Psi(x,y) = 0 \iff y = f(x)$$

- Mais on a gagné quelque chose :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - \int_0^1 \frac{1}{x+(y-x)t}\,dt + y\int_0^1 \frac{t}{(x+(y-x)t)^2}\,dt$$

D'où $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}(e,e) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e} + e\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{e^2}\,dt = \frac{1}{2e} \neq 0$.

Dès lors, comme Ψ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[^2$, le théorème des fonctions infinies donne le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f au point e.
$\to$ on l'avait déjà aux autres points, on a donc ce qu'on voulait.

III | • Etudions f !

Comme $f \circ f = id$ (il suffit de calculer), sa courbe est symétrique par rapport à la 1ère bissectrice.

Regardons donc f sur $]1;e[$.

$$f'(x) = (h^{-1})'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \frac{g'(x)}{h'(h^{-1}(g(x)))}.$$

Mais on sait que : $g' > 0$
$h' < 0$

Donc $f' < 0$.

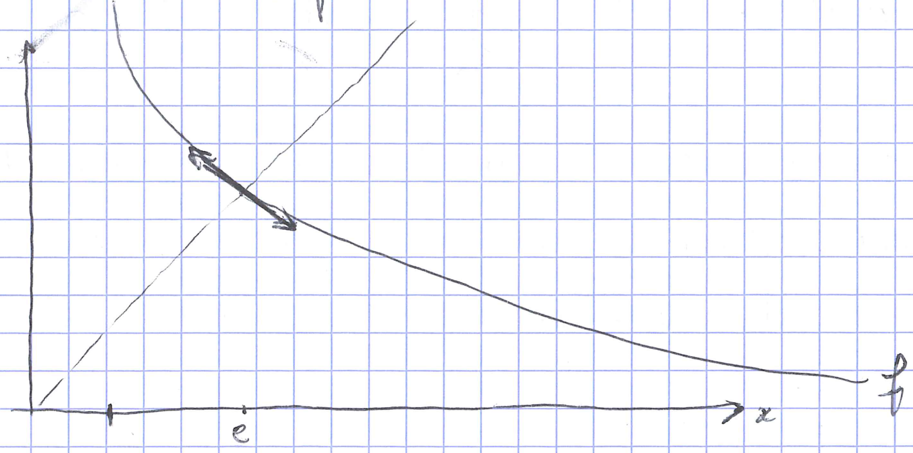
Et le théorème des fonctions implicites va nous impressionner jusqu'ici en donnant :

$$f'(e) = \frac{\partial_x \Psi(e,e)}{\partial_y \Psi(e,e)} = -\frac{1/2e}{1/2e} = -1.$$

Finalement, on a

$$f(x) = h^{-1} \circ g(x) \xrightarrow[x>1]{x \to 1} +\infty$$

On peut alors tracer f :



THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ.

Leçons : 220

Référence : Gourdon

Théorème

• Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

$f : \Omega \to \mathbb{R}^{nd}$ continue

localement lipschitzienne en la seconde variable.

$t_0, x_0 \in \Omega$.

On considère le problème :

$$(S)\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Alors il existe $h > 0$ et $x : I_h \to \mathbb{R}^{nd}$ $\mathcal{C}_1$ solution UNIQUE au problème (S) et telle que $x(t_0) = x_0$, avec $I_h = [t_0 - h ; t_0 + h]$.

• De plus, il n'y a qu'une seule solution maximale $x : I \to \mathbb{R}^n$.

Résumé

I – Contrôler les éléments en jeu.

II – Définir un opérateur dont un point fixe est solution et le trouver.

III – Regarder les solutions maximales

I • Fixons d'abord $r > 0$ tel que :

– $\underbrace{[t_0 - r ; t_0 + r]}_{I_r} \times \underbrace{\bar{B}(x_0, r)}_{B_r} \subseteq \Omega$

– f est • bornée par M sur $I_r \times B_r$ (compact !)

• k-lipschitzienne en sa 2^e variable,

• Par ailleurs, une solution de (S) vérifie, pour $x \in I$:
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\, du.$$

II • Pour $\alpha < r$, regardons $A(\alpha) = \mathcal{C}(I_\alpha, B_r)$ et posons

$$F : \begin{array}{ccc} A(\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I_\alpha, \mathbb{R}^n) \\ x & \longmapsto & \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\, du\right) \end{array}$$

• On aimerait avoir $F(A(\alpha)) \subseteq A(\alpha)$. Ajustons α :

* Pour $t \in I_\alpha$, on a :
$$\|F(x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\, du \right\|$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(u, x(u))\|\, du$$
$$\leqslant M|t - t_0| \leqslant M\alpha.$$

* Donc si $\underline{M\alpha \leqslant r}$, $A(\alpha)$ est stable par F.

• De plus, si F est strictement contractante, on a gagné.
Munissons $A(\alpha)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Pour $t \in I_\alpha$, $x_1, x_2 \in A(\alpha)$, on a :

$$\|F(x_1)(t) - F(x_2)(t)\| \leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, x_1(u)) - f(u, x_2(u))\, du \right\|$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(u, x_1(u)) - f(u, x_2(u))\|\, du$$
$$\leqslant k\,|t - t_0|\, \|x_1 - x_2\|_\infty$$
$$\leqslant k\alpha\, \|x_1 - x_2\|_\infty.$$

* Donc si $\underline{k\alpha < 1}$, F est strictement contractante.

→ par le théorème du point fixe, le problème (S) admet une unique solution sur un intervalle $[I - \alpha ; I + \alpha]$.

$\boxed{\text{III}}$ • Soient alors x_1 et x_2 deux solutions maximales de I dans $\mathbb{R}^n$ telles que $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$.

• Supposons qu'elles ne soient pas égales sur I.

Posons alors $\tilde{t}_0$ le premier point où elles bifurquent :

$$\tilde{t}_0 = \inf \{ t \in I,\ t \geq t_0 \text{ et } x_1(t) \neq x_2(t) \}$$

On a alors $x_1(t) = x_2(t)$ pour $t \in [t_0 ; \tilde{t}_0[$.

Ainsi, par continuité, $x_1(\tilde{t}_0) = x_2(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$.

• Le théorème d'unicité locale donne alors un intervalle $[\tilde{t}_0 - \alpha ; \tilde{t}_0 + \alpha]$ sur lequel x_1 et x_2 coïncident, ce qui contredit la définition de $\tilde{t}_0$.

FORMULE DES COMPLÉMENTS

Leçons : 265, 236, 239

Ref : Analyse complexe, E. Amar E. Matheron p. 249.

Théorème

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) \in]0;1[$, alors

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \text{où } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

Résumé

I - Pour $\alpha \in]0;1[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

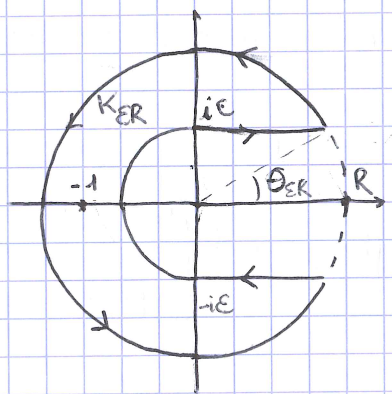
II - Calcul de $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ et conclusion

I • Posons $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0;+\infty[$, la fonction suivante est holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$:

$$f : z \longmapsto \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \quad \text{pour } z \in \Omega \setminus \{-1\}. \text{ et } \alpha \in]0;1[.$$

• Le résidu de f en -1 est donc $\displaystyle Res(f,-1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$.

• Pour utiliser le théorème des résidus, définissons un compact à bord régulier, dont le bord ne contient pas -1.



• Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, définissons $K_{\varepsilon R}$ délimité par :

* le demi cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon,\ Re(z) \leq 0\}$
* les segments $I^+_{\varepsilon R} = [i\varepsilon ; i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$

$I^-_{\varepsilon R} = [-i\varepsilon ; -i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$
* l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} = \{Re^{i\theta} \mid \theta \in [-\pi,\pi], |\theta| \geq \theta_{\varepsilon R}\}$

où $\theta_{\varepsilon R} = \arcsin \varepsilon/R$.

• Comme $-1 \in \overset{\circ}{K}_{\varepsilon R}$, la formule des résidus donne :

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

• Calculons cette intégrale sur chaque morceau de $\partial K_{\varepsilon R}$.

* sur C_ε :

$$\left| \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz \right| \leqslant \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{|z|^\alpha |1+z|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \cdot \pi\varepsilon = \frac{\pi \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon}.$$

donc, pour $\varepsilon \to 0$, cette intégrale tend vers 0 car $1-\alpha > 0$.

* sur $\Gamma_{\varepsilon R}$, paramétré par $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$ pour $\theta \in [\theta_{\varepsilon R} ; 2\pi - \theta_{\varepsilon R}]$:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} f(Re^{i\theta})\,\gamma'(\theta)\,d\theta = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i\theta(1-\alpha)}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta.$$

et cette intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i\theta(1-\alpha)}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ quand $\varepsilon \to 0$, par le théorème de convergence dominée par exemple.

* sur $I^+_{\varepsilon R}$ et $I^-_{\varepsilon R}$, pour $t \in]0 ; +\infty[$

- d'abord, $(t \pm i\varepsilon)^\alpha = \left(\sqrt{t^2+\varepsilon^2}\, e^{\pm i \arctan(\pm \frac{\varepsilon}{t})}\right)^\alpha$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} t^\alpha e^{2i\pi\alpha} \text{ ou } t^\alpha$$

- $|f(t+iy)| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha(1+t)}$ qui est intégrable sur $]0 ; R[$.

→ le théorème de convergence dominée donne donc :

$$\int_{I^+_{\varepsilon R}} f \to \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} \quad \text{et} \quad \int_{I^-_{\varepsilon R}} f = e^{2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

• Pour l'instant, on a donc, compte tenu de l'orientation

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \left(1 - e^{-2i\pi\alpha}\right) \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + i \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}}{1+Re^{i\theta}} e^{i\theta(1-\alpha)}\,d\theta = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

• Comme, pour $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\left| \frac{R^{1-\alpha}}{1+Re^{i\theta}} e^{i\theta(1-\alpha)} \right| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \quad \text{et } \alpha > 0$$

la deuxième intégrale tend vers 0 quand $R \to +\infty$.

• Et $R \to +\infty$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{2i\pi e^{-i\pi\alpha}}{1-e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{2i\pi}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

II] • On va utiliser le principe des zéros isolés :
si pour tout $\alpha \in]0;1[$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$, alors, $]0;1[$ admettant un point d'accumulation dans $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < Re(z) < 1\}$, les deux fonctions seront égales. (car elles sont holomorphes).

• Le théorème de Fubini donne, pour $0 < \alpha < 1$:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{\alpha-1} e^{-t} s^{-\alpha} e^{-s} \, dt \, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-t-s} \, ds \, \frac{dt}{t}$$

On peut alors faire le changement de variables $(u,v) = \left(s+t, \frac{t}{s}\right)$
car $\varphi : (t,s) \longmapsto (s+t, t/s)$ est
un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$
dont l'inverse est $(u,v) \longmapsto \left(\dfrac{uv}{1+v}, \dfrac{u}{1+v}\right)$

Et le jacobien de φ^{-1} est :

$$\begin{vmatrix} v/_{1+v} & u/_{(1+v)^2} \\ 1/_{1+v} & -u/_{(1+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{uv+u}{(1+v)^3} = -\frac{u}{(1+v)^2} = -\frac{t}{v(1+v)}$$

• D'où

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} v^{\alpha} e^{-u} \cdot \frac{-\cancel{t}}{v(1+v)} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} \, du\, dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} e^{-u} \, dv\, du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} \, dv$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi(1-\alpha))} \quad \text{(lemme } \underline{+}\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

ETUDE DU Θ-SCHEMA POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR

Leçons 162, 233

Références Quarteroni, Sacco, Saleri p. 458-459

Di Menza p. 98

Théorème

On étudie l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) = 0 \end{cases}$$

On se donne un pas Δt et Δx et on pose $t_n = n\Delta t$ et $x_j = j\Delta x$.

$\longrightarrow$ on veut construire une approximation $u_j^n \simeq u(t_n, x_j)$

Pour cela on définit le Θ-schéma, pour $\Theta \in [0,1]$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \Theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \nu(1-\Theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Le Θ-schéma est

I - bien défini

II - convergent pour la norme L_2 si

* $\Theta \geq 1/2$
* $\Theta < 1/2$ et $(1-2\Theta)\dfrac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$.

III - D'ordre 1 en temps et 2 en espace en général

2 en temps et 2 en espace si $\Theta = 1/2$.

I] On peut écrire ce schéma sous forme matricielle, posons :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le schéma se réécrit comme une mise à jour du vecteur u^n :

$$\left(I + \theta \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) u^{n+1} = \left(I - (1-\theta) \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) u^n .$$

Donc il est bien défini si $I + \theta\alpha A$ est inversible, avec $\alpha = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Montrons le en regardant le spectre de cette matrice.

Si λ est valeur propre de A, on a un système, pour un vecteur propre $x_1, \dots, x_N$

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\
&\vdots \\
-x_{N-2} + 2x_{N-1} - x_N &= \lambda x_{N-1} \\
-x_{N-1} + 2x_N &= \lambda x_N
\end{aligned}$$

C'est donc une suite récursive ayant pour polynôme $X^2 - (2-\lambda)X + 1 = 0$.

que l'on factorise en $(X - e^{it})(X - e^{-it}) = X^2 - 2\cos t + 1$

Avec conditions initiales $\begin{cases} x_0 = x_{N+1} = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

On a donc

$$0 = x_0 = \alpha + \beta \longrightarrow \alpha = -\beta$$

$$1 = x_1 = \alpha e^{it} - \alpha e^{-it} = 2i \sin t \longrightarrow \alpha = 1/2i\sin t = -\beta .$$

$$0 = x_{N+1} = \frac{e^{i(N+1)t} - e^{-i(N+1)t}}{2i \sin t} = \frac{\sin((N+1)t)}{\sin t}$$

donc $\sin(N+1)t = 0$ et $\sin t \neq 0$ donc $t = \frac{k\pi}{N+1}$. avec $1 \leq k \leq N$. (n valeurs !)

Ce qui donne n valeurs propres, soit toutes :

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{N+1} = 2\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) > 0 .$$

Donc les valeurs propres de $I + \theta\alpha A$ sont toutes > 0

$\longrightarrow$ $I + \theta\alpha A$ est inversible.

II | On regarde la consistance du schéma.

La formule de Taylor donne :

$$\ast \quad u(t_{n+1},x_j) - u(t_n,x_j) = \Delta t\left(\partial_t u(t_n,x_j) + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta t)\right)$$

$$\ast \quad u(t_n,x_{j+1}) - 2u(t_n,x_j) + u(t_n,x_{j-1}) = \Delta x\Big(\cancel{\partial_x u(t_n,x_j)} + \partial_x^2 u(t_n,x_j)\frac{\Delta x}{2}$$

$$- \cancel{\partial_x u(t_n,x_j)} + \frac{\Delta x}{2}\partial_x^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta x)\Big)$$

$$= \Delta x^2 \partial_x^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta x^2)$$

$$\ast \quad u(t_{n+1},x_{j+1}) - 2u(t_{n+1},x_j) + u(t_{n+1},x_{j-1}) = \Delta x^2 \partial_x^2 u(t_{n+1},x_j) + o(\Delta x^2)$$

$$= \frac{1}{\nu}\partial_t u(t_{n+1},x_j) + o(\Delta x^2)$$

$$= \frac{1}{\nu}\partial_t u(t_n,x_j) + \frac{\Delta t}{\nu}\partial_t^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta x^2) + o(\Delta t).$$

On remplace tout dans le schéma pour obtenir l'erreur ε_j^n en (t_n,x_j) :

$$\varepsilon_j^n = \Delta t\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\partial_t^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta x^2) + o(\Delta t)$$

(il y a plein d'erreurs dans cette partie mais c'est surtout pour la culture, on va pas le faire à l'oral c'est horrible)

III | Regardons la stabilité.

On a vu que $u^{n+1} = (I + \theta\alpha A)^{-1}(I + (1-\theta)\alpha A)u^n$.

Mais ces deux matrices sont diagonalisables, notons B leur produit, on a :

$$\mathrm{Sp}B = \left\{ \left(1 + 4\theta\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^{-1}\left(1 + 4(1-\theta)\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right) \middle| 1 \leq j \leq n \right\}$$

$$= \left\{ \left(1 - \left(1 + 4\theta\alpha\sin\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^{-1} \cdot 4\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right) \middle| 1 \leq j \leq n \right\}$$

La méthode est donc stable si la plus grande de ces valeurs propres est, en valeur absolue, ≤ 1, c'est-à-dire si et seulement si pour $1 \leq k \leq n$:

$$1 - \underbrace{(1+4\Theta\alpha\sin^2)^{-1}\cdot 4\alpha\sin^2}_{\text{positif donc on sera toujours } \leq 1\,!} \geq -1$$

Donc si $4\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) \leq 2\left(1+4\Theta\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)$

ie $$-2 \leq 4(2\Theta-1)\,\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right).$$
$$-1 \leq 2(2\Theta-1)\,\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right).$$

On a donc la condition :

* soit $\Theta \geq 1/2$
* soit $\Theta < 1/2$ et comme $\sin^2 \leq 1$, $2(1-2\Theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} < 1$.

• Un mot sur la convergence :

On aimerait avoir $\max_j \| u^n - \underbrace{u(t_n, x_j)_j}_{v_n} \| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{\Delta t \to 0} 0$

On peut écrire $v_{n+1} = B v_n + \varepsilon_n \Delta t$.

d'où $$v_{n+1} - u_{n+1} = B(v_n - u_n) + \varepsilon_n \Delta t.$$
$$= B^n(v_0 - u_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t\, B^k \varepsilon_k.$$

Mais par hypothèse $v_0 = u_0$

et $\|B\| \leq 1$ par stabilité

$\|\varepsilon_n\| \xrightarrow{\Delta t, \Delta x \to 0} 0$ par consistance

Donc $\|v_n - u_n\| \xrightarrow{\Delta t, \Delta x \to 0} 0$

$$\left(\leq \underbrace{N\Delta t}_{=T} \|\varepsilon_k\|_\infty\right)$$

DIFFERENTIELLE DE L'EXPONENTIELLE MATRICIELLE

Leçons 156, 220, 221

Référence Rouvière p. 307

Théorème

$$d\exp(X)\cdot H = e^{X}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{ad}X)^k}{(k+1)!}H$$ où E evn, $H\in E$, $X\in\mathcal{L}(E)$.

Résumé

I - Deux équations différentielles :

(1) $f' = Af$ $f(0)=H$

(2) $g' = e^{tA}H$ $g(0)=0$

II - On admet que exp est $\mathcal{C}^2$ et on pose $g : t \mapsto \partial_{u=0}\left(e^{-tX}e^{t(X+uH)}\right)$.

On a bien $g'(t) = e^{-t\,\mathrm{ad}X}H$ et $g(0)=0$ où $\mathrm{ad}(X)H = XH - HX$.

III - Conclusion avec la formule qu'on cherchait.

I) • Remarquons que $(e^{tA})' = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!} = e^{tA}A = Ae^{tA}$.

On a donc une solution $e^{tA}\cdot H$ de (1), qui vérifie $f(0) = e^{0}\cdot H = H$.

$\rightarrow f = e^{tA}H$.

• Intégrons maintenant l'exponentielle :

$\rightarrow g(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}A^n}{(n+1)!}\right)\cdot H$

et on a bien $g(0)=0$.

II) • On suppose que l'exponentielle est $\mathcal{C}^2$, donc la fonction

$$(t,u) \longmapsto e^{-tX} e^{t(X+uH)}$$

est aussi $\mathcal{C}^2$.

Le théorème de Schwarz permet de permuter les dérivations :

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \partial_t \partial_{u=0} \left(e^{-tX} e^{t(X+uH)} \right) \\
&= \partial_{u=0} \partial_t \left(e^{-tX} e^{t(X+uH)} \right) \\
&= \partial_{u=0} \left(-e^{-tX} X e^{t(X+uH)} + e^{-tX} \cdot e^{t(X+uH)} (X+uH) \right) \\
&= \partial_{u=0} \left(u e^{-tX} e^{t(X+uH)} \cdot H \right) \\
&= \partial_{u=0} \left(u e^{-tX} \cdot H \cdot e^{t(X+uH)} \right) \\
&= e^{-tX} H e^{tX}.
\end{aligned}$$

Calculons cela en se ramenant à une équation différentielle.

Posons $f(t) = e^{-tX} \cdot H \cdot e^{tX}$.

On a $f'(t) = -Xe^{-tX} X H e^{tX} + e^{-tX} H \cdot e^{tX} X$

$$= -\operatorname{ad} X (f(t))$$

f vérifie donc $f' = (-\operatorname{ad} X) f$ avec $f(0) = H$.

d'où, d'après I :

$$f(t) = e^{-t \operatorname{ad} X} \cdot H$$

Donc on a bien $g'(t) = e^{-t \operatorname{ad} X} \cdot H$.

III | • On peut donc intégrer g comme on l'a vu en I :

$$g(H) = \partial_{u=0}\left(e^{-X}e^{X+uH}\right)$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{ad}\,X)^n}{(n+1)!}\right)H.$$

Mais la fonction exp est différentiable en X, d'où

$$\partial_{u=0}\left(e^{-X}e^{X+uH}\right) = e^{-X}\, d\exp(X)\cdot H.$$

On a donc

$$d\exp(X)\cdot H = e^{X}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{ad}\,X)^n}{(n+1)!}\right)\cdot H.$$

Théorème des Extrema liés.

Leçons : 159, 214, 219

Références : Rouvière p. 373

Avez p. 98, p. 103.

Théorème

Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. $(E = \mathbb{R}^n)$.

$g_1, \dots, g_k : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$.

On suppose que pour tout $u \in \mathcal{U}$, $dg_1(u), \dots, dg_k(u)$ sont linéairement indépendants.

Alors l'ensemble des zéros des $g_1, \dots, g_k$ est une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$.

et si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable et présente un extrémum lié en $m \in \mathcal{U}$ sur M, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que

$$df(m) = \lambda_1 dg_1(m) + \dots + dg_k(m).$$

Résumé

I - Lemme : avec les hypothèses du théorème, si $\operatorname{Ker} dg_i(m) \subseteq \operatorname{Ker} df(m)$, $df(m)$ est une combinaison linéaire des $dg_i(m)$.

II - $T := \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} dg_i(m) = T_m M$.

III - $T_m M \subseteq \operatorname{Ker} df(m)$ et conclusion.

Application :

Théorème spectral par les extrema liés !

I | • Complétons $dg_1, \dots, dg_k$ en une base $(b_1, \dots, b_n)$ de E^*.

et posons $(e_1, \dots, e_n)$ la base duale de E.

• On a $df(m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.

Mais $\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker} b_i = \operatorname{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$

d'où $df(m) \cdot e_r = 0 = \lambda_r e_r$ pour $r = k+1$ à n.

• Donc $df(m) = \lambda_1 dg_1(m) + \dots + \lambda_k dg_k(m)$.

II • $T_m M$ est un espace vectoriel de dimension $n-k$ (par la 1ère définition des sous-variétés.)

• L'intersection $T := \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} dg_i(m)$ est un espace vectoriel de dimension $n-k$, par indépendance linéaire des $dg_i(m)$.

→ il suffit de montrer que $T_m M \subseteq T$ pour avoir l'égalité !

• Soit alors $\gamma : I \to E$ une courbe tracée sur M.

Par définition de M, $g_i(\gamma(t)) = 0$ pour $t \in I$. $\subset M$.

Donc la différentielle de cette fonction est nulle en $0 \in I$:

$$dg_i(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = dg_i(m) \cdot \gamma'(0) = 0.$$

Donc $\gamma'(0) \in T$ d'où l'égalité des deux espaces.

III • Soit $v \in T_m M$,

$\gamma : I \to E$ tracée sur M d'origine m telle que $\gamma'(0) = v$.

• Comme 0 est un extremum de la fonction $f \circ \gamma : I \to E$.

$$0 = \frac{d f\circ\gamma}{dt}(0) = df(\gamma(0))\,\gamma'(0) = df(m) \cdot v.$$

• Cela prouve bien l'inclusion $T_m M \subseteq \operatorname{Ker} df$.

Le premier lemme donne alors directement le résultat.

Application Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.

- Posons
$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u(x), x \rangle \end{array}.$$

- f est différentiable et $df(x)\cdot h = \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle = 2\langle u(x), h\rangle$.
→ donc f atteint un maximum sur la sphère unité S, car celle-ci est compacte en dimension finie. Notons m le point où ce maximum est atteint.

- Or, être sur la sphère unité S correspond à la contrainte
$$g(x) := \langle x, x\rangle - 1 = 0.$$
Mais on peut calculer $dg(x)\cdot h = \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle = 2\langle x, h\rangle$.

- Le théorème des extrema liés donne alors
$$df(m) = \lambda\, dg(m)$$
ie $\langle u(m), h\rangle = \lambda\langle m, h\rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.
d'où $u(m) = \lambda m$

- De plus, si $\langle y, m\rangle = 0$, on a
$$\langle u(y), m\rangle = \langle y, u(m)\rangle = \lambda\langle y, m\rangle = 0,$$
donc l'espace orthogonal à m est invariant par u, et on peut donc procéder par récurrence sur la restriction de u à cet espace.

FORMULE DES COMPLÉMENTS

Leçons : 265, 236, 239

Ref : Analyse complexe, E. Amar E. Matheron p. 249.

Théorème

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) \in]0;1[$, alors
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad \text{où } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Résumé

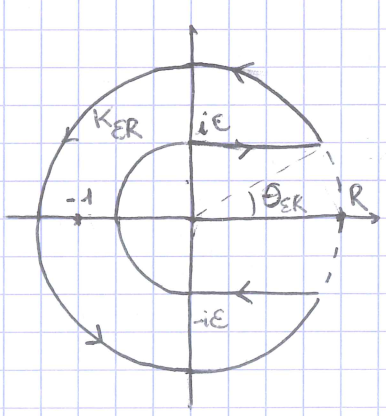
I - Pour $\alpha \in]0;1[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

II - Calcul de $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ et conclusion

I • Posons $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0;+\infty[$, la fonction suivante est holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$:
$$f : z \longmapsto \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \quad \text{pour } z \in \Omega \setminus \{-1\}. \text{ et } \alpha \in]0;1[.$$

• Le résidu de f en -1 est donc $\displaystyle Res(f,-1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$.

• Pour utiliser le théorème des résidus, définissons un compact à bord régulier, dont le bord ne contient pas -1.



• Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, définissons $K_{\varepsilon R}$ délimité par :

* le demi cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon,\ Re(z) \leq 0\}$
* les segments $I^+_{\varepsilon R} = [i\varepsilon\,;\, i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$

  $I^-_{\varepsilon R} = [-i\varepsilon\,;\, -i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$
* l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} = \{Re^{i\theta} \mid \theta \in [-\pi,\pi],\ |\theta| \geq \theta_{\varepsilon R}\}$

où $\theta_{\varepsilon R} = \arcsin \varepsilon/R$.

• Comme $-1 \in \overset{\circ}{K}_{\varepsilon R}$, la formule des résidus donne :

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

• Calculons cette intégrale sur chaque morceau de $\partial K_{\varepsilon R}$.

* sur C_ε :

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{|z|^\alpha |1+z|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \cdot \pi\varepsilon = \frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon}.$$

donc, pour $\varepsilon \to 0$, cette intégrale tend vers 0 car $1-\alpha > 0$.

* sur $\Gamma_{\varepsilon R}$, paramétré par $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$ pour $\theta \in [\theta_{\varepsilon R}; 2\pi - \theta_{\varepsilon R}]$:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} f(Re^{i\theta})\,\gamma'(\theta)\,d\theta = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i\theta(1-\alpha)}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta.$$

et cette intégrale tend vers $\int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i\theta(1-\alpha)}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ quand $\varepsilon \to 0$, par le théorème de convergence dominée par exemple.

* sur $I^+_{\varepsilon R}$ et $I^-_{\varepsilon R}$, pour $t \in]0;+\infty[$

- d'abord, $(t \pm i\varepsilon)^\alpha = \left(\sqrt{t^2+\varepsilon^2}\, e^{\pm i \arctan(\pm\frac{\varepsilon}{t})}\right)^\alpha$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} t^\alpha e^{2i\pi\alpha} \text{ ou } t^\alpha$$

- $|f(t+iy)| \leqslant \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ qui est intégrable sur $]0;R[$.

$\longrightarrow$ le théorème de convergence dominée donne donc :

$$\int_{I^+_{\varepsilon R}} f \longrightarrow \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} \quad \text{et} \quad \int_{I^-_{\varepsilon R}} f = e^{-2i\pi\alpha}\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

• Pour l'instant, on a donc, compte tenu de l'orientation

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f \xrightarrow{\varepsilon\to 0} (1-e^{-2i\pi\alpha})\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + i\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}}{1+Re^{i\theta}} e^{i\theta(1-\alpha)}\,d\theta = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

• Comme, pour $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\left| \frac{R^{1-\alpha}}{1+Re^{i\theta}} e^{i\theta(1-\alpha)} \right| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \quad \text{et } \alpha > 0$$

la deuxième intégrale tend vers 0 quand $R \to +\infty$.

• Et $R \to +\infty$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{2i\pi e^{-i\pi\alpha}}{1-e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{2i\pi}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

II. • On va utiliser le principe des zéros isolés :

si pour tout $\alpha \in]0;1[$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$, alors, $]0;1[$ admettant un point d'accumulation dans $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < Re(z) < 1\}$, les deux fonctions seront égales. (car elles sont holomorphes).

• Le théorème de Fubini donne, pour $0 < \alpha < 1$:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{\alpha-1} e^{-t} s^{-\alpha} e^{-s} \, dt \, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-t-s} \, ds \, \frac{dt}{t}$$

On peut alors faire le changement de variables $(u,v) = \left(s+t, \frac{t}{s}\right)$ car $\varphi : (t,s) \longmapsto (s+t, t/s)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur U dont l'inverse est $(u,v) \longmapsto \left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v}\right)$

Et le jacobien de φ^{-1} est :

$$\begin{vmatrix} v/_{1+v} & u/_{(1+v)^2} \\ 1/_{1+v} & -u/_{(1+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{uv+u}{(1+v)^3} = -\frac{u}{(1+v)^2} = -\frac{t}{v(1+v)}$$

• D'où

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} v^{\alpha} e^{-u} \cdot \frac{-\cancel{u}}{v(1+v)} \cdot \frac{1}{\cancel{u}} \, du\, dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} e^{-u} \, dv\, du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} \, dv$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi(1-\alpha))} \qquad \text{(lemme } \underline{+}\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

PROCESSUS DE GALTON - WATSON

Leçons : 226, 229, 260, 264

Références : Probabilités pour les non probabilistes, Walter Appel.

Exercices de probabilités, Marie Cottrell p.72.

Théorème

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$.

On considère les variables aléatoires $(X_i^n)_{\substack{n \geq 0 \\ i \geq 1}} \overset{iid}{\sim} \mu$.

Le processus de Galton-Watson est défini par les variables $(Z_n)_{n \geq 0}$:

$$Z_0 = 1 \qquad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n.$$

En posant $m = \mathbb{E}(\mu) > 0$, on a trois cas possibles :

- $m > 1$ (sur-critique) et $\mathbb{P}(\exists n,\ Z_n = 0) = 0$
- $m < 1$ (sous-critique) et $\mathbb{P}(\exists n,\ Z_n = 0) = 1$.
- $m = 1$ (critique) $\longrightarrow$ si $\mu(1) = 1$, $\mathbb{P}(\exists n, Z_n = 0) = 0$
  $\longrightarrow$ sinon, $\mathbb{P}(\exists n,\ Z_n = 0) = 1$.

Interprétation

On a un individu au début, il a des descendants selon μ.

À chaque étape, on a une nouvelle génération : tout le monde meurt et laisse $X \sim \mu$ enfants derrière lui.

On regarde dans ce développement quand la dynastie s'éteint.

Résumé

I - Étude de l'évènement M : "la dynastie finit par s'éteindre."

LEMME II - Étude de la fonction génératrice G_n de Z_n.

III - Recherche des points fixes de G_1.

I| Remarquons que si il existe $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = 0$, alors $Z_{m \geq n} = 0$.

- L'événement M est donc l'union croissante des $\{Z_n = 0\}$ pour $n \geq 0$.
- En posant $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ pour $n \geq 0$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \to +\infty} x_n =: \alpha.$$

Cette limite existe car $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée.

II| • Montrons que la fonction génératrice G_n de Z_n vérifie :

$$G_{n+1} = G \circ G_n. \qquad \text{pour } n \geq 1$$

Avec $G_1 = G$, la fonction génératrice de μ.

On a en effet, pour $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \mathbb{E}\left(t^{Z_{n+1}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(t^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{N=0}^{+\infty} t^{\sum_{i=1}^{N} X_i^n} \mathbb{1}_{Z_n = N}\right) \\
\text{Fubini-Tonelli} \longrightarrow &= \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{N} t^{X_i^n} \mathbb{1}_{Z_n = N}\right) \\
\text{indépendence} \longrightarrow &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) \prod_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{E}\left(t^{X_i^n}\right)}_{= G(t)} \\
&= \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) G(t)^N \\
&= G_n \circ G(t)
\end{aligned}$$

- De plus, $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$, et :

$$x_{n+1} = G_{n+1}(0) = G_n \circ G(0) = G \circ G_n(0) = G(x_n).$$

III

• Pour $t \in [0;1[$, on a :

• $G'(t) = \sum_{k \geq 1} k\,\mathbb{P}(Z_1 = k)t^{k-1}$ • $G''(t) = \sum_{k \geq 2} k(k-1)\mathbb{P}(Z_1 = k)t^{k-2}$

• On a donc pour $t \in [0;1[$:

→ $G'(t) > 0$ si $\mathbb{P}(X=0) \neq 1$.

→ $G''(t) \geq 0$. ⟶ donc G est convexe BORDEL !

• Ainsi, si l'on a un point fixe β de G, on a :

→ $x_{n+1} = G(x_n)$ car $x_n = G_n(0)$.

→ donc on a $\alpha = G(\alpha)$.

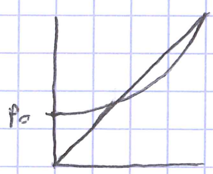
→ et on a $x_1 = \mathbb{P}(X=0) = G(0) < G(\beta) = \beta$ si $p(X=0) \neq 1$.

d'où $x_{n+1} = G(x_n) < G(\beta) = \beta$.

Donc pour tout point fixe de G, $\alpha \leq \beta$ par passage à la limite.

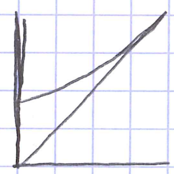
• Il ne reste plus qu'à tracer G pour conclure :

→ si $m > 1$



on a $\alpha < 1$

→ si $m < 1$



on a $\alpha = 1$

→ si $m = 1$, alors :

→ soit $\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1$ alors $\mathbb{P}(X=1) = 1$ et $\alpha = 0$.

→ soit $\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) < 1$, alors il existe $k \geq 2$ tq $\mathbb{P}(X=k) > 0$

et $G''(t) > 0$ donc G reste au dessus de la première bissectrice et on a $\alpha = 1$.

METHODE DU GRADIENT À PAS OPTIMAL

Leçons 219, 229, 233

Références Ciarlet p. 188-191

Théorème

Une fonctionnelle est dite elliptique si elle est $\mathcal{C}^1$ et s'il existe une constante α telle que

$$(\nabla J(v) - \nabla J(u), v-u) \geq \alpha \|v-u\|^2$$

On définit la méthode de gradient optimal par la donnée de u_0 et la construction

$$J(u_k - \rho(u_k)\nabla J(u_k)) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} J(u_k - \rho \nabla J(u_k))$$

$$u_{k+1} = u_k - \rho(u_k)\nabla J(u_k).$$

Pour une fonctionnelle elliptique définie sur $\mathbb{R}^n$, cette méthode converge.

Résumé

I - J est strictement convexe et coercive ;

$$J(v) - J(u) \geq (\nabla J(u), v-u) + \frac{\alpha}{2}\|v-u\|^2.$$

II - $\|u_k - u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\nabla J(u_k)\| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

III - Cas d'une fonctionnelle quadratique elliptique

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

I] • J est $\mathcal{C}^1$, on peut donc écrire Taylor reste intégral :

$$J(v) - J(u) = \int_0^1 (\nabla J(u+t(v-u)), v-u)\, dt$$

$$= (\nabla J(u), v-u) + \int_0^1 (\nabla J(u+t(v-u)) - \nabla J(u), v-u)\, dt$$

$$\geq (\nabla J(u), v-u) + \int_0^1 \alpha t \|v-u\|^2 \, dt$$

$$\geq (\nabla J(u), v-u) + \frac{\alpha}{2}\|v-u\|^2$$

Donc J est strictement convexe et coercive car :

$$J(v) \geq J(0) + (\nabla J(0), v) + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2$$

II] • Comme J est strictement convexe, on a un minimum en un point u tel que $\nabla J(u) = 0$.

Et on peut écrire :

$$\alpha \|u_k - u\|^2 \leq (\nabla J(u_k) - \nabla J(u), u_k - u)$$

$$= (\nabla J(u_k), u_k - u)$$

$$\leq \|\nabla J(u_k)\| \cdot \|u_k - u\|.$$

(1) On a donc $\|u_k - u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\nabla J(u_k)\|$. (fondamental !)

→ il suffit de montrer que le terme de droite tend vers 0 pour avoir la convergence.

• Montrons que les directions de descentes successives sont orthogonales.

Considérons la fonction

$$\varphi_k : \rho \longmapsto J(u_k - \rho \nabla J(u_k))$$

On a

$$\varphi_k(\rho+h) = J(u_k - \rho\nabla J(u_k)) - (\nabla J(u_k - \rho \nabla J(u_k)), h \nabla J(u_k))$$

Donc $\varphi_k'(\rho) = -(\nabla J(u_{k+1}), \nabla J(u_k))$

Or $\rho(u_k)$ est défini comme le minimum de φ_k, qui est convexe et coercive (car J l'est !), on a donc

$$(\nabla J(u_{k+1}), \nabla J(u_k)) = -\varphi_k'(\rho) = 0.$$

Et même, par définition de $u_{k+1} = u_k - \rho(u_k)\nabla J(u_k)$,

$$(\nabla J(u_{k+1}), u_{k+1} - u_k) = 0.$$

Donc l'inégalité de I donne :

$$J(u_{k+1}) - J(u_k) \geqslant \frac{\alpha}{2} \|u_{k+1} - u_k\|^2.$$

- À partir de là, on va supposer $\nabla J(u_k) \neq 0$ pour $k \geqslant 0$, car si ce gradient est nul c'est qu'on a trouvé exactement u en un nombre fini d'étapes.

→ on peut donc dire que la suite $(J(u_k))_k$ est

* décroissante
* minorée

Donc $J(u_{k+1}) - J(u_k) \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

d'où $\|u_{k+1} - u_k\| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

- On se rapproche de $\|\nabla J(u_k)\|$, regardons :

$$\|\nabla J(u_k)\|^2 = (\nabla J(u_k), \nabla J(u_k) - \nabla J(u_{k+1}))$$
$$\leqslant \|\nabla J(u_k)\| \, \|\nabla J(u_k) - \nabla J(u_{k+1})\|$$

donc $\|\nabla J(u_k)\| \leqslant \|\nabla J(u_k) - \nabla J(u_{k+1})\|$

- Mais remarquons que comme $(J(u_k))_k$ est décroissante, ~~elle est bornée~~ la suite $(u_k)_k$ est bornée car J est coercive.

Dès lors la dérivée de J n'a besoin d'être considérée que sur un compact, sur lequel elle est uniformément continue car continue !

Or $\|u_k - u_{k+1}\| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$ donc $\|\nabla J(u_k) - \nabla J(u_{k+1})\| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

Mais c'est un majorant de $\|\nabla J(u_k)\|$, et on a donc bien la convergence.

III / Une petite remarque pratique d'application aux systèmes linéaires :

soit $J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$

on a $\nabla J(v) = Av - b$

donc trouver le minimum de J résout notre système $Ax = B$.

Mais ~~on a~~ alors

$$0 = (\nabla J(u_k), \nabla J(u_{k+1})) = (Au_k - b,\ A(u_k - \rho(u_k)(Au_k - b)) - b)$$
$$= (Au_k - b, Au_k - b) + (Au_k - b,\ -\rho(u_k)A(Au_k - b))$$
$$= (Au_k - b,\ w_k - \rho(u_k)Aw_k)$$
$$= (w_k,\ w_k - \rho(u_k)Aw_k)$$

Mais on a alors, en posant $w_k = \nabla J(u_k) = Au_k - b$:

$$0 = (\nabla J(u_{k+1}), \nabla J(u_k))$$
$$= (w_k - \rho(u_k)Aw_k,\ w_k)$$
$$= (w_k, w_k) - \rho(u_k)(Aw_k, w_k)$$

On peut donc donner un algorithme utilisable en pratique :

$$\begin{cases} w_k = Au_k - b \\ \rho(u_k) = \dfrac{\|w_k\|^2}{(Aw_k, w_k)} \\ u_{k+1} = u_k - \rho(u_k)w_k. \end{cases}$$

Développement asymptotique de la série harmonique

Leçons 223, 224, 230

Référence FGN Analyse 1 p. 156

Théorème

Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

On montre que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Résumé

I - Posons $u_n = H_n - \ln(n)$, $v_n = u_n - 1/n$. Ces deux suites sont adjacentes, ce qui donne le terme constant.

II - D'autres termes du développement asymptotique !

I | • On a par définition $u_n - v_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

• u_n est décroissante car :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\leqslant 0 \quad \text{car } \ln(1+x) \leqslant x \text{ pour } x > -1. \end{aligned}$$

• v_n est croissante car :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \cancel{\frac{1}{n+1}} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\geqslant 0 \quad \text{car } \ln(1+x) \leqslant x. \end{aligned}$$

En fait, on doit remarquer avant de poser v_n que ce terme $-\frac{1}{n}$ c'est un miracle des propriétés du log :

$$-1/n \leqslant -\ln(1 + 1/n) = \ln(1 - 1/(n+1)) \leqslant -1/(n+1).$$

On peut donc dire que u_n et v_n sont adjacentes et convergent donc vers un réel γ, la constante d'Euler.

Et même $\gamma > 0$ car $v_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} = 1 - \ln 2 > 0$

et $\gamma \geq v_2$

II) On va choper deux autres termes du développement asymptotique !

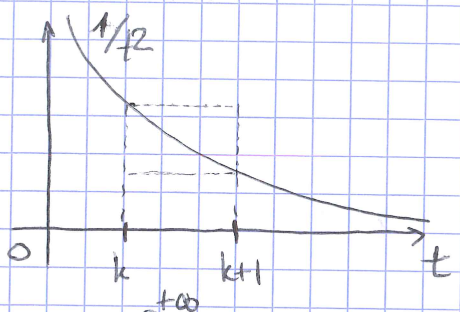
- Posons $t_n = H_n - \ln(n) - \gamma$.

Regardons la différence

$$t_n - t_{n-1} = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

La série des $\frac{1}{n^2}$ converge, on peut donc sommer les équivalents sur les restes de la série :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$



Comparons avec une intégrale !

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^2}$$

Donc $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^2 \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

Or $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[-\frac{1}{\alpha-1} t^{-\alpha+1}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Donc les intégrales de gauche et de droite sont équivalentes à $\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^2 \sim \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{n}$.

On a donc

$$-t_n \sim -\frac{1}{2n} \quad \text{soit } t_n \sim \frac{1}{2n}$$

Donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

• Un terme de plus ?

Soit $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}$.

On a encore $-w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_n - w_{n-1}$

or $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$.

$$= \cancel{\frac{1}{n}} + \left(-\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2n^2}} - \frac{1}{3n^3} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{6n^3}$$

On peut alors sommer et comparer avec une intégrale, ce qui donne :

$$w_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_n - w_{n-1} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6n^3} \sim \frac{1}{12n^2}.$$

Donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Intégrale de Dirichlet et Fourier.

Leçons 236, ~~2~~46, 250

Référence Faraut, Calcul Intégral p. 98 p. 134 puis p. 135 ou p. 155

Théorème

- On montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$

- Puis que si f est intégrable sur $[0;T]$ a une limite $f(0_+)$ en 0, et qu'il existe K et x_0 tels que pour $0 < x < x_0$, $|f(x) - f(0_+)| \leq Kx$, alors :
$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^T f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0_+).$$

- Puis, selon la leçon, on montre
  - → Si f est intégrable et a des limites à gauche et à droite en x, et qu'il existe $\eta, M > 0$ tels que $0 < h < \eta$ implique
$$|f(x+h) - f(x_+)| \leq Mh \quad \text{et} \quad |f(x-h) - f(x_-)| \leq Mh$$
alors $\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} e^{ixt} \hat{f}(t) dt \xrightarrow{A \to +\infty} \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$

  - → si f est périodique de période T intégrable sur tout intervalle borné, et a des limites à gauche et à droite en x, et qu'il existe K, h_0 tels que si $0 < h < h_0$: $|f(x+h) - f(x_+)| \leq Kh$ et $|f(x-h) - f(0_-)| \leq Kh$
alors $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n(f) e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \xrightarrow{N \to +\infty} \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$

I • Posons $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} dx$.

Déjà, on a $\left| e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} \right| \leqslant e^{-\lambda x}$ si $x \geqslant 1$ et continue sinon

donc F est bien définie pour $\lambda > 0$.

De plus, on a : $\left| \frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\right)\right| = \left| -x \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} \right| \leqslant e^{-\lambda x}$ intégrable.

on en déduit que

$$F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \sin x \, e^{-\lambda x} dx = \left[\left(\frac{1}{1+\lambda^2} \cos x + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sin x\right) e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{1+\lambda^2}$$

Ce qui donne

$$F(\lambda) = -\arctan \lambda + C.$$

Or $|F(\lambda)| = |C - \arctan \lambda| < \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \to +\infty} 0$

d'où $C = \pi/2$.

On a donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\lambda \to 0} F(\lambda) = \frac{\pi}{2}$.

II • Écrivons, pour $0 < \eta < T$:

$$\int_0^T f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx - \frac{\pi}{2} f(0_+)$$

$$= \underbrace{\int_0^\eta (f(x) - f(0_+)) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx}_{I_1(\eta,\lambda)} + \underbrace{\int_\eta^T \frac{f(x)}{x} \sin \lambda x \, dx}_{I_2(\eta,\lambda)} - \underbrace{\int_\eta^{+\infty} f(0_+) \frac{\sin \lambda x}{x} dx}_{I_3(\eta,\lambda)}$$

On a alors, pour $0 < \eta < x_0$:

$$|I_1(\eta,\lambda)| \leqslant \int_0^\eta \underbrace{|f(x) - f(0_+)|}_{K\eta} \cdot \underbrace{\left|\frac{\sin(\lambda x)}{x}\right|}_{\simeq 1 \text{ (et borné en tout cas)}} dx \leqslant K\eta^2$$

$$\int_M^T \frac{f(x)}{x} \sin \lambda x \, dx \xrightarrow{\lambda \to +\infty} 0 \text{ par le lemme de Riemann-Lebesgue.}$$

Et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_M^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_{\lambda M}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 0$

D'où le résultats

III | Pour la transformée de Fourier

$$\int_{-A}^{A} e^{ixt} \hat{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-A}^{A} e^{i(x-y)t} dt \right) f(y) dy \quad \text{d'après Fubini.}$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Ay}{y} \left(f(x+y) + f(x-y) \right) dy$$

car $\int_{-A}^{A} e^{i(x-y)t} dt = \left[\frac{1}{i(x-y)} e^{i(x-y)t} \right]_{-A}^{A} = \frac{1}{i(x-y)} \cdot 2i \sin(x-y)$

et on obtient le résultat par changement de variable.

Puis le théorème précédent donne

$$\int_{-A}^{A} e^{ixt} \hat{f}(t) dt \xrightarrow{A \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \left(f(x+) + f(x-) \right)$$

Pour la série de Fourier

On pose $D_N(x) = \sum\limits_{n=-N}^{N} e^{i \frac{2\pi}{T} nx} = \dfrac{\sin\left(2\pi (N + \frac{1}{2}) \frac{x}{T}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x}{T}\right)}$

le noyau de Dirichlet

Cela donne alors

$$S_N f(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_N(y) f(x-y)\,dy$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} D_N(y)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(f(x-y)+f(x+y)\right)dy$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}(N+\frac{1}{2})y\right)}{y}\cdot\underbrace{\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi y}{T}\right)}\cdot\frac{1}{2}\left(f(x+y)+f(x-y)\right)}_{g(y)}dy$$

On peut alors appliquer le théorème à g :

$$S_N f(x) \xrightarrow{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(f(x_+)+f(x_-)\right)$$

INEGALITÉS DE KOLMOGOROV.

Leçons 228.

Références Gourdon, Analyse p.83

FGN analyse 1

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \geq 2)$.

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| \qquad 0 \leq k \leq n.$$

On suppose que M_0 et M_n ont des valeurs finies.

Alors tous les M_k, $0 \leq k \leq n$ sont finis et on a l'inégalité

$$M_k \leq 2^{k(m-k)/2} M_0^{1-k/m} M_m^{k/m} \qquad \text{pour} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq m \leq n \\ 0 \leq k \leq m. \end{array}$$

Résumé

I - Les M_k sont finis.

II - $M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$

III - La formule trop petite

I • Posons $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_{n-1}$, la formule de Taylor-Lagrange donne c_i tel que $x < c_i < x + h_i$

$$\left| f(x+h_i) = f(x) + h_i f'(x) + \cdots + \frac{h_i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h_i^n}{n!} f^{(n)}(c_i) \right.$$

On peut réécrire cet ensemble d'égalités sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & h_1 & \cdots & h_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & h_{n-1} & \cdots & h_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} f'(x) \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{X(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x+h_1) - f(x) + \frac{f^{(n)}(c_1)}{n!} \\ \vdots \\ f(x+h_{n-1}) - f(x) + \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!} \end{pmatrix}}_{B(x)}$$

On a donc un système $\Pi X(x) = Y(x)$.
où Π est une matrice de Vandermonde avec des coefficients distincts donc Π est inversible !

Dès lors, $X \longrightarrow \Pi^{-1} X$ est une application continue, donc il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\|Y(x)\| = \|\Pi^{-1} X(x)\| \leq \alpha \|X(x)\|.$$

Mais par hypothèse, $X(x)$ est borné donc Y l'est aussi !

II | • On peut écrire, pour $h > 0$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_+) \qquad c_+ \in]x, x+h[$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_-) \qquad c_- \in]x-h, x[$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h)\right) + \frac{h}{4}\left(f''(c_-) - f''(c_+)\right)$$

soit $|f'(x)| \leq \frac{1}{2h} \cdot 2\Pi_0 + \frac{h}{4} \cdot 2\Pi_2$

On a donc $\Pi_1 \leq \frac{\Pi_0}{h} + \frac{h}{2}\Pi_2$.

$\longrightarrow$ le membre de droite est minimal pour $h = \sqrt{\frac{2\Pi_0}{\Pi_2}}$

$\Longrightarrow$ ce qui donne $\Pi_1 \leq \sqrt{2\Pi_0\Pi_2}$.

III | Montrons le résultat par récurrence sur m.

$m=1$ $\quad M_k \leq 2^{k(1-k)} \cdot \Pi_0^{1-k}\, \Pi_1^{k}$ $\quad$ évident

$m=2$ $\quad M_k \leq 2^{k(1-k)/2}\, \Pi_0^{1-k/2}\, \Pi_2^{k/2}$ $\quad$ $k=0$ ou 2 évident

$k=1$ conséquence de II.

• Supposons maintenant le résultat vrai à un rang m.

On peut appliquer $\underline{\text{II}}$ à la fonction $f^{(m-1)}$ et obtenir :

$$M_m \leqslant \sqrt{2M_{m-1}M_{m+1}}$$

Donc $M_m^2 \leqslant 2M_{m-1}M_{m+1}$

$$\leqslant 2 \cdot 2^{(m-1)(m-m+1)/2} \cdot M_0^{1-\frac{m-1}{m}} \cdot M_m^{\frac{m-1}{m}} \cdot M_{m+1}.$$

Dès lors,

* soit $M_m = 0$ mais alors f est polynomiale de degré $< m$ ce qui donne la propriété

* soit on peut regrouper les M_m à gauche :

$$(*) \quad M_m^{1+\frac{1}{m}} \leqslant 2^{\frac{m+1}{2}} M_0^{\frac{1}{m}} M_{m+1}$$

Cela donne le résultat pour $k = m+1$.

Maintenant si $k \leqslant m$, par hypothèse :

$$M_k \leqslant 2^{k(m-k)/2} \, M_0^{1-k/m} \cdot M_m^{k/m}$$

On peut donc utiliser $(*)$ pour remplacer $M_m^{k/m}$ (puissance $k/_{m+1}$ dans $(*)$)

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(m-k)}{2}+\frac{k}{2}} \cdot M_0^{1-k/m+k/m(m+1)} M_{m+1}^{k/m+1}$$

$$= 2^{k(m+1-k)/2} \cdot M_0^{1-k/m+1} M_{m+1}^{k/m+1}.$$

MÉTHODE DE LAPLACE

Leçons 228, 239, 224

Référence Rouvière p. 339 (ex 113)

Théorème

Soit $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non)

$\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$.

$f : [a,b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ est intégrable sur $[a,b[$ pour un certain t_0.

On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$.

Posons $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx$, et on cherche un équivalent :

- Si $\varphi' > 0$ sur $[a,b[$, $F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} \cdot \frac{\exp(-t\varphi(a)) f(a)}{t}$

- si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$:

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{\exp(-t\varphi(a)) f(a)}{\sqrt{t}}.$$

Application : formule de Stirling

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t \,dx \sim \sqrt{2\pi t}\; t^t \exp(-t).$$

Résumé

I - Étude de deux cas particuliers significatifs : $\varphi = x$ et $\varphi = x^2$.

II - Généralisation aux deux cas généraux du théorème.

III - Application à la formule de Stirling.

Ce qu'on va montrer, c'est en fait qu'on peut couper le développement de Taylor :

$f(t) \simeq f(a)$ et $\varphi(x) \simeq \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a)$ voire $\varphi(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(a)$.

et que cela a des répercussions retentissantes sur F, où toute la masse est concentrée au début par l'exponentielle.

On va supposer que $t_0 = 0$ pour simplifier les calculs.

I] • f est continue à l'origine donc il existe $M>0$ et $\alpha \in]0,b[$ tels que :

$$\forall x \in [0;\alpha] \quad |f(x)| \leq M.$$

Dès lors, pour $\varphi : x \mapsto x$

$$* \int_0^{\alpha} e^{-tx} f(x)\,dx = \int_0^{t\alpha} e^{-u} f(u/t) \frac{du}{t} \sim \frac{f(0)}{t}$$

car le théorème de convergence dominée s'applique :

- la fonction est intégrable en u
- et elle est bornée par Me^{-u} pour tous u, t.

$$* \left| \int_{\alpha}^{b} e^{-tx} f(x)\,dx \right| \leq e^{-t\alpha} \int_{\alpha}^{b} |f(x)|\,dx$$

qui tend vers 0 de façon exponentielle et est donc négligeable devant $1/t$.

De même, pour $\varphi : x \mapsto x^2$

$$* \int_0^{\alpha} e^{-tx^2} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-u^2} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) \frac{du}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} f(0) e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} f(0)$$

on conclut par convergence dominée

et par négligence de l'autre partie de l'intégrale.

II] • On va faire un changement de variable pour se ramener au cas i étudié :

$x \mapsto y = \varphi(x) - \varphi(a) : [a,b[\to [0,c[$ un C^1 diff. d'inverse ψ.

On a : $F(t) = \displaystyle\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx$

$$= \int_0^c e^{-t\varphi(a)} e^{-ty} f(\psi(y))\, \psi'(y)\,dy$$

$$\sim e^{-t\varphi(a)} \frac{f(\psi(0))\,\psi'(0)}{t}$$

Et la conclusion vient de $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = 1/\varphi'(a)$

Dans le deuxième cas, on procède de façon similaire :

$$x \mapsto y = \sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)} : [a,b[\longrightarrow [0,c[$$

Remarquons que $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$

et $\varphi''(a) > 0$

Dès lors $\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)-\varphi(a)}}}_{>0 \text{ pour } x>a.} \sim \frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{\frac{1}{2}(x-a)^2\varphi''(a)}} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}} > 0$ en $x=a$

Donc $x \mapsto y$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'inverse ψ et on a :

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-ty^2} f(\psi(y))\,\psi'(y)\,dy$$

$$\sim e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} f(\psi(0))\,\psi'(0)$$

$$\sim e^{-t\varphi(a)} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{f(a)}{\sqrt{t}}.$$

III| • La fonction $x \mapsto e^{-x} x^t$ a pour dérivée $(-x^t + t x^{t-1})e^{-x}$ et est donc maximale en $x = t$.

On va se ramener au cas où son maximum est en 0 :

$$\Gamma(t+1) \underset{x=(1+u)t}{=} \int_{-1}^{+\infty} e^{-(1+u)t} ((1+u)t)^t \, t\,du$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} t^{t+1} e^{-\varphi(u)t} du \quad \text{où } \varphi(u) = 1+u - \ln(1+u).$$

On a ensuite

$$\int_{-1}^{0} e^{-t\varphi(u)} du = \int_0^{+1} e^{-t\varphi(-u)} du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(u)} du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\, e^{-t}$$

Des lors on obtient :

$$\Gamma(t+1) \sim t^t e^{-t} \cdot \sqrt{2\pi t}$$

D'où la formule de Stirling !

THÉORÈME DE LIAPOUNOV

Leçons : 220, 221, 208

Références : Rouvière p. 130 (ex. 46)

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
Si la matrice $Df(0)$ n'a que des valeurs propres de partie réelle < 0, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel

$$(S) \quad y' = f(y) \quad \text{avec} \quad y(0) = x$$

Remarque : on ramène l'étude d'un système non linéaire à l'étude d'un système linéaire en montrant que notre approximation est raisonnable.

Résumé

I – Étude du système linéaire $z' = Df(0)z$.

i. il existe un polynôme P tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|e^{tA}x\| \leq P(|t|)\left(\sum_{j=1}^{k} e^{t \operatorname{Re} \lambda_j}\right)\|x\|. \quad \text{où } \operatorname{Sp} Df(0) = \{\lambda_i\}$$

ii. on en déduit le comportement asymptotique de z.

II – Étude du vrai système : soit y une solution

i. $q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$ où $r(y) = f(y) - Ay$

et il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$q(y) < \alpha \Rightarrow -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leq -\beta q(y)$$

ii. puis $q(x) < \alpha \Rightarrow q(y(t)) \leq \alpha$ pour tout $t \geq 0$

et $q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$

I| i D'après le lemme des noyaux on peut écrire tout $x \in \mathbb{C}^n$ ainsi :

$$x = x_1 + \dots + x_k \quad \text{où} \quad x_j \in E_j = \operatorname{Ker}(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$$

On a alors

$$e^{tA} x_j = e^{t\lambda_j} \cdot e^{t(A-\lambda_j I_n)} x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I_n)^p \right) x_j$$

Pour une norme quelconque de $\mathbb{C}^n$ on a alors :

$$\begin{aligned} \|e^{tA} x\| &\leq \sum_{j=1}^{k} \|e^{tA} x_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} C_j (1+|t|)^{m_j - 1} \|x_j\| \\ &\leq C (1+|t|)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} \right) \max_j \|x_j\| \end{aligned}$$

pour des constantes $(C_i)_i$, C bien choisies.

par équivalence des normes, on a le résultat car $\|x\|_\infty \leq C' \|x\|$.

ii La solution du système linéarisé est $z(t) = e^{tA} x$.

On a donc :

$$\|z(t)\| \leq C (1+|t|)^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \underbrace{e^{t \operatorname{Re} \lambda_j}}_{\leq e^{-ta}} \|x\|$$

pour a tel que $\operatorname{Re} \lambda_j \leq -a$.

$$\leq P(|t|) e^{-ta} \|x\|. \quad \text{où } P \in \mathbb{C}[X].$$

donc $z(t) \to 0$ exponentiellement et l'origine est un point d'équilibre attractif.

II| i Remarquons que $b(x,y) = \int_0^{+\infty} (e^{tA} x \cdot e^{tA} y) \, dt$ est :

- bien définie car $|e^{tA} x \cdot e^{tA} y| \leq \|e^{tA} x\| \cdot \|e^{tA} y\| \leq C^2 e^{-2at} \|x\| \|y\|$.
- bilinéaire et symétrique
- et $q(x) := b(x,x)$ est définie positive.

• Dès lors, prenons une solution y de (S), on a

$$\begin{aligned} q(y)' &= Dq(y)y' \\ &= 2b(y,y') \quad \text{car } q(x+y) = q(x) + 2b(x,y) + q(y) \\ &= 2b(y,Ay) + 2b(y,r(y)) \\ &= -2\|y\|^2 + 2b(y,r(y)) \end{aligned}$$

• Ce qui invite à majorer :

$$|b(y,r(y))| \leqslant \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$$ par Cauchy-Schwarz pour la norme $x \mapsto \sqrt{q(x)}$

Mais on a

$$r(y) = f(y) - f(0) - Df(0)y \quad (= o(\|y\|))$$

donc, il existe $\alpha > 0$ tel que si $q(y) \leqslant \alpha$ alors $\sqrt{q(r(y))} \leqslant \varepsilon \sqrt{q(y)}$
pour tout $\varepsilon > 0$

ie $\|y\|_q \leqslant \alpha \Rightarrow \|r(y)\|_q \leqslant \varepsilon \|y\|_q$.

On a donc, pour $q(y) \leqslant \alpha$

$$\begin{aligned} q(y)' &= -2\|y\|^2 + 2b(y,r(y)) \\ &\leqslant -2C\|y\|_q^2 + 2\varepsilon\|y\|_q^2 \\ &\leqslant -\beta q(y) \quad \text{pour } \beta = -(-2C + 2\varepsilon) = 2C - 2\varepsilon > 0 \text{ si } \varepsilon \text{ petit.} \end{aligned}$$

<u>ii</u> Mais que vaut la condition $q(y) \leqslant \alpha$?

• si $q(x) < \alpha$ au début ça reste vrai ensuite

<u>Ah bon?</u> → • sinon, il existe un t_0 minimal tel que $q(y(t_0)) = \alpha$, et on a alors

$q(y)'(t_0) \leqslant -\beta q(y(t_0)) < 0$ donc on a un $t_0' < t_0$ tel que $q(y(t_0')) \leqslant \alpha$ ce qui contredit la définition de t_0 → absurde.

Donc y vérifie l'inéquation différentielle :

$$q(y)' \leqslant -\beta q(y).$$

Ce qui se résout ainsi :

$$\left(e^{\beta t} q(y)\right)' = e^{\beta t}\left(q(y)' + \beta q(y)\right) \leqslant 0.$$

donc $q(y(t)) \leqslant e^{-\beta t} q(x)$ pour $t \geqslant 0$ car $y(0) = x$.

donc $y(t) \longrightarrow 0$ exponentiellement !

Compteur LogLog

Leçons : 260, 264

Références :

Théorème

Soit $\varepsilon, \delta > 0$.

Il existe une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $\mathbb{P}(|X_n - n| \geq \varepsilon n) \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

et presque sûrement, X_n se code en $O(\log_2(\log_2(n)))$ bits

Résumé

I – On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $2^{\log_2 n} = n$. On va estimer $\lfloor \log_2 n \rfloor$ avec une variable aléatoire dont l'espérance est n et la variance $\frac{n(n-1)}{2}$.

En posant $(\xi_{i,n})_{\substack{i \geq 0 \\ n \geq 0}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli $Ber(2^{-i})$, et S_n une somme de ces v.a.

II – Calcul d'une estimateur non biaisé de n et de la précision en proba.

III – Calcul de l'ordre de grandeur de cet estimateur en proba.

I | • Prenons $\varepsilon, \delta > 0$.

On veut approcher $\lfloor \log_2 n \rfloor$, donc à chaque fois qu'on augmente de 1, on divise par 2 la proba d'augmenter à nouveau... c'est ça le log !

Posons $(\xi_{i,k})_{\substack{i \geq 0 \\ k \geq 0}}$ des v.a.i de loi $Ber(2^{-i})$.

$S_0 = 0$ et $S_{n+1} = \cancel{\xi_{S_n,n+1}}$. $S_n + \xi_{S_n, n+1}$

On calcule l'espérence de 2^{S_n}.

On a alors, d'une part,

$$E(2^{S_0}) = E(2^0) = 1.$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{S_{n+1}} \mathbb{1}_{S_n=k}\right)$$ puis permutation par Fubini.

Et, on a

$$\mathbb{E}(2^{S_{n+1}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[(2^{S_{n+1}}) \mathbb{1}_{S_n=k}\right]$$ par le théorème de convergence monotone, et car $\mathbb{E}(2^{S_{n+1}}) \mathbb{1}_{S_n=k}$ est la limite d'une somme, et donc d'une suite croissante.

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[(2^{k+\xi_{k,n+1}}) \mathbb{1}_{S_n=k}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \mathbb{E}(2^{\xi_{k,n+1}}) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n=k})$$ par indépendance.

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \cdot (2^1 \cdot 2^{-k} + 2^0 \cdot (1-2^{-k})) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n=k})$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n=k}) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n=k})$$

$$= \mathbb{E}(2^{S_n}) + 1.$$

D'où, par récurrence, $\mathbb{E}(2^{S_n}) = n+1$.

- Calculons ensuite la variance de 2^{S_n}, pour avoir un résultat de précision.

$*$ $Var(2^{S_0}) = Var(1) = 0$.

$*$ $Var(2^{S_{n+1}}) = \mathbb{E}((2^{S_{n+1}})^2) - \mathbb{E}(2^{S_{n+1}})^2$

$$= \mathbb{E}\left(4^{S_{n+1}} - (n+2)^2\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[(4^{S_{n+1}} - (n+2)^2) \mathbb{1}_{S_n=k}\right]$$ (convergence dominée)

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(4^k \cdot \mathbb{E}(4^{\xi_{k,n+1}}) - (n+2)^2\right) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n=k})$$ (indépendance)

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(4^k (4 \cdot 2^{-k} + 1(1-2^{-k})) - (n+1)^2 - 2(n+1) - 1\right) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n=k})$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(4 \cdot 2^k + 4^k - 2^k - (n+1)^2 - 2(n+1) - 1\right) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_n=k})$$

$$= \mathbb{E}(4^{S_n} - (n+1)^2) + 3\,\mathbb{E}(2^{S_n}) - 2(n+1) - 1$$

$$= Var(2^{S_n}) + 3(n+1) - 2(n+1) - 1$$

$$= Var(2^{S_n}) + n.$$ d'où $Var(2^{S_n}) = \sum_{k=1}^{n} k-1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

II • Construisons notre estimateur, en posant :

$$X_n = 2^{S_n} - 1.$$

Et posons $X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}$ k copies indépendantes de X_n.

On a alors naturellement envie de poser $\overline{X_n} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_n^{(i)}$.

Cela donne :

$$* \ \mathbb{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(X_n^{(i)}) = \mathbb{E}(X_n).$$

$$* \ \mathrm{Var}(\overline{X_n}) = \frac{1}{k^2} k \,\mathrm{Var}(X_n)$$ par indépendance ⚠

$$= \frac{1}{k} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

• Dès lors, on obtient :

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - n| \geq \varepsilon n) \leq \frac{\mathrm{Var}\,\overline{X_n}}{(\varepsilon n)^2} \leq \frac{1}{2k\varepsilon^2} \leq \delta$$ pour k assez grand.

III • Enfin, regardons l'ordre de grandeur des S_n en posant :

$$N_n = \lfloor \ln_2 S_n \rfloor + 1 + \cdots + \lfloor \ln_2 S_n \rfloor + 1 = k(\lfloor \ln_2 S_n \rfloor + 1)$$

On va montrer $N_n \leq 3k\ln_2(\ln_2(n))$ presque sûrement :

$$\mathbb{P}(N_n \geq 3k\ln_2(\ln_2(n))) \leq k\,\mathbb{P}(\ln_2 S_n + 1 \geq 3 \ln(\ln(n)))$$

$$\leq k\,\mathbb{P}(\ln_2 S_n \geq 2 \ln(\ln(n)))$$ pour $n \geq 4$.

$$\leq k\,\mathbb{P}(S_n \geq \ln(n)^2)$$

$$\leq k\,\mathbb{P}(2^{S_n} - 1 \geq n^{\ln(n)} - 1)$$

$$\leq k \cdot \frac{\mathbb{E}(2^{S_n} - 1)}{n^{\ln(n)} - 1}$$

$$\leq \frac{k}{n^2}$$ pour n assez grand.

Dès lors on a la convergence de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_n \geqslant 3k \ln(\ln(n))) < +\infty .$$

Donc, d'après Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\exists N \ \ \forall n \geqslant N \ \ N_n < 3k \ln(\ln(n))) = 1 .$$

Méthode de Newton.

Leçons : 223, 226.

Références : Petit guide de calcul diff, François Rouvière. p. 142.

Théorème

Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in [c,d]$.

On considère la suite récurrente :

$$x_{n+1} = F(x_n) \text{ pour } n \geq 0, \text{ avec } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors f s'annule en un unique point $a \in [c,d]$ et :

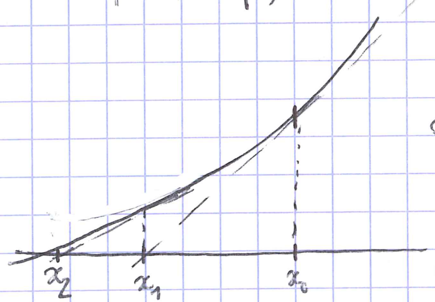
(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha\,;\,a+\alpha]$ est stable par F, et pour $x_0 \in I$, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge quadratiquement vers a.

(ii) Si, de plus, pour tout $x \in [c,d]$, $f''(x) > 0$, alors pour tout $x_0 \in [a,d]$, $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante ou constante, et $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ pour un certain C.

$$x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ pour } x_0 > a.$$

Heuristique

À chaque étape, on cherche en fait le zéro de la tangente à la courbe :



L'équation de la tangente en x_n est :

$$0 = y = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

D'où $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = F(x_n)$.

Résumé 0 - Montrer que f a un unique zéro sur $[c,d]$.

I - Utiliser la formule de Taylor pour obtenir une relation entre $|x_{n+1}-a|$ et $|x_n-a|$.

II - En déduire que $|x_n - a| \leq (C\gamma)^{2^n}$ pour $\gamma < 1$.

III - Si de plus f est convexe ($f'' > 0$), c'est optimal.

0) • f est continue et monotone car $f'(x) > 0$ sur $[c,d]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $0 \in [f(c), f(d)]$, f s'annule une fois sur $[c,d]$, en a.

I) • On a : $F(a) = a$

$$F'(a) = 1 - \frac{f'(a)^2 - f(a)f''(a)}{f'(a) \times f'(a)} = 0.$$

Rmq On s'attend à avoir $F(x) - a$ de l'ordre de $(x-a)^2$.

• La formule de Taylor donne $z \in [c,d]$ tel que :

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(z).$$

Soit, comme $f'(x) \neq 0$:

$$\frac{1}{f'(x)}\big(\underbrace{f(a)}_{=0} - f(x)\big) + x - a = \frac{(x-a)^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}$$

$$F(x) - a = \frac{(x-a)^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}$$

(1) • D'où $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ avec $C = \dfrac{\max |f''|}{2 \min f'}$.

II) • Prenons $\alpha > 0$ tel que $C\alpha < 1$

et $I = [a-\alpha ; a+\alpha] \subseteq [c,d]$.

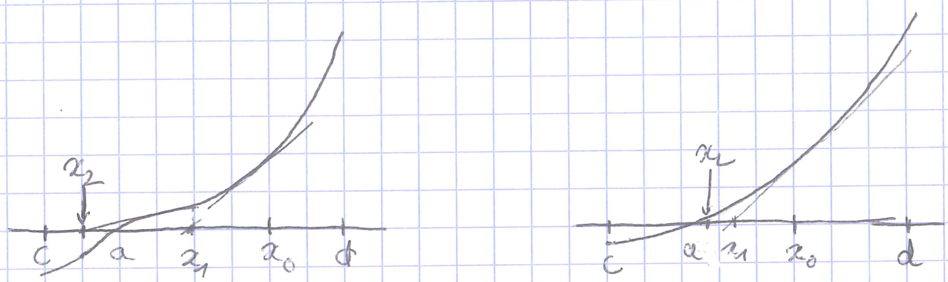
• Remarquons que si $x \in I$, $|F(x) - a| \leq C\alpha^2 \leq \alpha$

donc I est stable par F d'où, d'après (1) :

(2) $$C|x_n - a| \leq (C|x_{n-1} - a|)^2 \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}.$$

Comme $C\alpha < 1$, on a bien une convergence d'ordre 2 de x vers a.

III • Comme la fonction f est convexe, ça se passe encore mieux :



En effet : $[a;d]$ est ici stable par F : pour $x \in [a,d]$

$$\rightarrow F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)} \geqslant 0 \qquad (z \in]a,x[).$$

$$\rightarrow F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x \leqslant d.$$

• La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante à valeurs dans $[a,d]$ si $x_0 \in [a;d]$.

• Elle converge donc vers une limite ℓ qui vérifie :

$F(\ell) = \ell$ soit $f(\ell) = 0$.

D'où $\ell = a$. (c'est le seul zéro de f).

• On a alors, comme dans I, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F(x_n) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z_n)}{f'(x_n)}(x_n - a)^2 \quad \text{avec } a \leqslant z_n \leqslant x_n.$$

Donc $z_n \xrightarrow{n\to+\infty} a$ et $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} a$.

D'où $x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Formule sommatoire de Poisson + Shannon

Leçons 246, 250

Référence Bernis, p. 253

Théorème

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction de l'espace de Schwartz.

On montre d'abord que pour $t \in \mathbb{R}$, (formule de Poisson)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \exp(2in\pi t).$$

Puis on l'applique en supposant le support $\hat{f}$ inclus dans un segment de la forme $[-F, F]$, où $2F \leq 1$: pour $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \operatorname{sinc}((n-t)\pi) \quad \text{où} \quad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

I) • On s'intéresse à $g : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t)$, et pour en faire quelque chose (en particulier avoir la convergence de sa série de Fourier!) on a besoin de montrer qu'elle est bien définie, $\mathcal{C}^1$ et périodique.

• g est bien définie : montrons sa convergence normale sur tout compact.

→ Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $K \subseteq [-N, N]$.

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}.$$

d'où $$f(t+n) \leq \frac{M}{1+(t+n)^2} = \frac{M}{1+t^2+nt+n^2} \underset{t \in K}{\leq} \frac{M}{1+N^2+|n|N+|n|^2}$$

cette série converge donc $\sum f(n+t)$ converge normalement

Notons que l'on peut faire exactement le même calcul pour $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, elle est en particulier $\mathcal{C}^1$, et on a :

* $\sum f(n+t)$ converge
* $\sum f'(n+t)$ converge uniformément sur tout compact.

$\longrightarrow$ g est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

de plus, un changement d'indice donne sa 1-périodicité.

On a donc, par le théorème de convergence normale de Dirichlet :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(g) \exp(2 i k \pi t) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Calculons ce coefficient de Fourier !

$$c_k(g) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) \right) \exp(-2i\pi k t)\, dt.$$

La convergence normale de g permet de permuter sans problème.

On va ensuite regarder les sommes partielles pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=-N}^{n=N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n+t) \exp(-2i\pi k t)\, dt = \sum_{n=-N}^{N} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(t) \exp(-2i\pi k(t-n))\, dt$$

$$= \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(t) \exp(-2i\pi k t)\, dt$$

car la fonction exp est $2i\pi$-périodique !

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient donc

$$c_k(g) = \hat{f}(k).$$

Et c'est sympa parce que ça donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \exp(+2i\pi kt)$$

II | • La transformée de Fourier envoie la classe de Schwartz sur elle même, on peut donc appliquer la formule qu'on vient de démontrer :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k+\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{f}}(k) \exp(2i\pi k\xi)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) \exp(2i\pi k\xi)$$

par la formule d'inversion de la TF dans la classe de Schwartz.

• On suppose le support de $\hat{f}$ inclus dans $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$, donc pour $k\neq 0$, $\hat{f}(k+\xi)$ est nul pour $\xi \in [-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$

D'où $$\hat{f}(\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k+\xi)$$
$$= \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) \exp(2i\pi k\xi).$$

→ on a donc fait le lien entre la TF de f, son support et tout ce qu'on a calculé avant !

Comme on veut un résultat sur f, calculons :

$$f(t) = \hat{\hat{f}}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \exp(2i\pi\xi t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]}(\xi) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(n) \exp(2i\pi\xi(k+t))\, d\xi$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(n) \exp(2i\pi\xi(t-n))\, d\xi$$

on inverse l'ordre de sommation

car la fonction f converge normalement, et que l'exponentielle complexe est de module 1.

On n'a plus qu'à calculer :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \exp(2i\pi\xi(t-n))\, d\xi = \left[\frac{1}{2i\pi(t-n)} \exp(2i\pi\xi(t-n))\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}$$

D'où la formule, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \operatorname{sinc}(\pi(t-n)).$$