FONCTION $\mathcal{C}^\infty$ SOLUTION DE $x^y = y^x$.

Leçon : 214

Références : Madère p. 119

Pommellet p. 291

Théorème

Pour $x, y \in]1; +\infty[$, l'équation $x^y = y^x$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ f telle que $y = f(x)$ et $f(x) \neq x$ si $x \neq e$.

Résumé

I – L'équation revient à $y \ln x = x \ln y$, on va donc étudier d'abord la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

II – On remarque que si $F(x,y) = x \ln y - y \ln x$, le théorème des fonctions implicites doit donner $y = f(x)$... sauf si $x = y = e$, où l'on a une branche $y = x$. (et ~~det~~ $d_y F(x,y) = 0$...)

$\longrightarrow$ on définit donc $\Psi(x,y) = \frac{x \ln y - y \ln x}{x - y}$, et on montre qu'on peut la prolonger et que le théorème des fonctions implicites donne alors la solution.

III – Une idée de la tête de f ?

I/ • On a $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Ce qui nous permet d'écrire son tableau de variations :

x	1		e		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

On peut donc définir deux bijections en tronquant φ :

$g :]1, e[\longrightarrow]-\infty ; 1/e]$

$h :]e ; +\infty[\longrightarrow]0 ; 1/e[$

Cela nous donne une belle idée de qui est f :

$$f : \begin{array}{ccc}]1 ; +\infty[& \longrightarrow &]1 ; +\infty[\\ x & \longmapsto & \begin{cases} h^{-1} \circ g(x) & \text{si } x \in]e ; +\infty[\\ g^{-1} \circ h(x) & \text{si } x \in]1 ; e[\\ e & \text{si } x = e. \end{cases} \end{array}$$

II] • Que dire du caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f ?

Comme φ est $\mathcal{C}^\infty$ et que $\varphi'(x) \neq 0$ si $x \neq e$, ~~donc~~ les fonctions h et g sont $\mathcal{C}^\infty$ et leurs inverses aussi.

$\longrightarrow$ dès lors f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1 ; +\infty[\setminus \{e\}$.

On commence à cerner qu'il va y avoir de jolis problèmes en (e, e).

$\longrightarrow$ on va ruser un peu en altérant $F(x,y) = x\ln y - y\ln x$ pour ne plus avoir cette histoire de dérivée en y nulle en (e,e).

Pour cela, posons, pour $x \neq y$:

$$\Psi(x,y) = \frac{x\ln y - y\ln x}{x-y}$$

Avec un peu de réécriture :

$$\Psi(x,y) = \ln(y) - y\,\frac{\ln(y) - \ln(x)}{y-x}$$

$$= \ln(y) - \frac{y}{y-x}\int_x^y 1/t \, dt$$

$$= \ln(y) - y\int_0^1 \frac{1}{x+(y-x)t}\, dt.$$

Mais par un théorème d'intégration, cette fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[^2$, et on peut ainsi prolonger la fonction φ même pour $x=y$.

On a alors d'ailleurs $\varphi(x,x) = \ln(x) - 1$.

- Dès lors, dire que $\varphi = 0$ revient à dire que :

$x \neq y$ et $\varphi(x,y) = 0$

"$x=y$" et $\varphi(x,x) = 0$, ce qui donne $x=e$.

~~On a vu dans le premier cas que $\partial_y \varphi(x,y) \neq 0$,~~
~~et dans le second cas, on a tout simplement~~ $x=e$.

Toutes ces propriétés sont carrément équivalentes d'où

$$\varphi(x,y) = 0 \iff y = f(x)$$

- Mais on a gagné quelque chose :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y} - \int_0^1 \frac{1}{x+(y-x)t}\,dt + y\int_0^1 \frac{t}{(x+(y-x)t)^2}\,dt$$

D'où $\displaystyle \frac{\partial \varphi}{\partial y}(e,e) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + e\int_0^1 \frac{t}{e^2}\,dt = \frac{1}{2e} \neq 0.$

Dès lors, comme φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[^2$, le théorème des fonctions implicites donne le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f au point e.
$\to$ on l'avait déjà aux autres points, on a donc ce qu'on voulait.

III | • Etudions f !

Comme $f \circ f = id$ (il suffit de calculer), sa courbe est symétrique par rapport à la 1ère bissectrice.

Regardons donc f sur $]1;e[$.

$$f'(x) = (h^{-1})'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{h'(h^{-1}(g(x)))}.$$

Mais on sait que : $g' > 0$

$h' < 0$

Donc $f' < 0$.

Et le théorème des fonctions implicites va nous impressionner jusqu'ici en donnant :

$$f'(e) = \frac{\partial_x \Psi(e,e)}{\partial_y \Psi(e,e)} = -\frac{1/2e}{1/2e} = -1.$$

Finalement, on a

$$f(x) = h^{-1} \circ g(x) \xrightarrow[x > 1]{x \to 1} +\infty$$

On peut alors tracer f :