ETUDE DU Θ-SCHEMA POUR L'EQUATION DE LA CHALEUR

Leçons 162, 233

Références Quarteroni, Sacco, Saleri p. 458-459

Di Menza p. 98

Théorème

On étudie l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) = 0 \end{cases}$$

On se donne un pas Δt et Δx et on pose $t_n = n\Delta t$ et $x_j = j\Delta x$.

$\longrightarrow$ on veut construire une approximation $u_j^n \simeq u(t_n, x_j)$

Pour cela on définit le Θ-schéma, pour $\Theta \in [0,1]$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \nu \Theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \nu(1-\Theta)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Le Θ-schéma est

I - bien défini

II - convergent pour la norme L_2 si

* $\Theta \geq 1/2$
* $\Theta < 1/2$ et $(1-2\Theta)\dfrac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$.

III - D'ordre 1 en temps et 2 en espace en général

2 en temps et 2 en espace si $\Theta = 1/2$.

I\] On peut écrire ce schéma sous forme matricielle, posons:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Le schéma se réécrit comme une mise à jour du vecteur u^n :

$$\left(I + \theta \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) u^{n+1} = \left(I - (1-\theta)\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) u^n .$$

Donc il est bien défini si $I + \theta\alpha A$ est inversible, avec $\alpha = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Montrons le en regardant le spectre de cette matrice.

Si λ est valeur propre de A, on a un système, pour un vecteur propre $x_1, \dots, x_N$

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\
&\vdots \\
-x_{N-2} + 2x_{N-1} - x_N &= \lambda x_{N-1} \\
-x_{N-1} + 2x_N &= \lambda x_N
\end{aligned}$$

C'est donc une suite récursive ayant pour polynôme $X^2 - (2-\lambda)X + 1 = 0$.

que l'on factorise en $(X - e^{it})(X - e^{-it}) = X^2 - 2\cos t + 1$

Avec conditions initiales $\begin{cases} x_0 = x_{N+1} = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

On a donc

$$0 = x_0 = \alpha + \beta \longrightarrow \alpha = -\beta$$

$$1 = x_1 = \alpha e^{it} - \alpha e^{-it} = 2i\sin t \longrightarrow \alpha = 1/2i\sin t = -\beta .$$

$$0 = x_{N+1} = \frac{e^{i(N+1)t} - e^{-i(N+1)t}}{2i\sin t} = \frac{\sin((N+1)t)}{\sin t}$$

donc $\sin(N+1)t = 0$ et $\sin t \neq 0$ donc $t = \frac{k\pi}{N+1}$. avec $1 \leq k \leq N$. (n valeurs !)

Ce qui donne n valeurs propres, soit toutes :

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\frac{k\pi}{N+1} = 2\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) > 0 .$$

Donc les valeurs propres de $I + \theta\alpha A$ sont toutes > 0

$\longrightarrow$ $I + \theta\alpha A$ est inversible.

II| On regarde la consistance du schéma.

La formule de Taylor donne :

* $u(t_{n+1},x_j) - u(t_n,x_j) = \Delta t\left(\partial_t u(t_n,x_j) + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta t)\right)$

* $u(t_n,x_{j+1}) - 2u(t_n,x_j) + u(t_n,x_{j-1}) = \Delta x\left(\cancel{\partial_x u(t_n,x_j)} + \partial_x^2 u(t_n,x_j)\frac{\Delta x}{2} - \cancel{\partial_x u(t_n,x_j)} + \frac{\Delta x}{2}\partial_x^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta x)\right)$

$$= \Delta x^2\, \partial_x^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta x^2)$$

* $u(t_{n+1},x_{j+1}) - 2u(t_{n+1},x_j) + u(t_{n+1},x_{j-1}) = \Delta x^2\, \partial_x^2 u(t_{n+1},x_j) + o(\Delta x^2)$

$$= \frac{1}{\nu}\partial_t u(t_{n+1},x_j) + o(\Delta x^2)$$

$$= \frac{1}{\nu}\partial_t u(t_n,x_j) + \frac{\Delta t}{\nu}\partial_t^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta x^2) + o(\Delta t).$$

On remplace tout dans le schéma pour obtenir l'erreur ε_j^n en (t_n,x_j) :

$$\varepsilon_j^n = \Delta t\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\partial_t^2 u(t_n,x_j) + o(\Delta x^2) + o(\Delta t)$$

(il y a plein d'erreurs dans cette partie mais c'est surtout pour la culture, on va pas le faire à l'oral c'est horrible)

III| Regardons la stabilité.

On a vu que $u^{n+1} = (I + \theta\alpha A)^{-1}(I + (1-\theta)\alpha A)u^n$.

Mais ces deux matrices sont diagonalisables, notons B leur produit, on a :

$$Sp B = \left\{ \left(1 + 4\theta\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^{-1}\left(1 + 4(1-\theta)\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right) \,\middle|\, 1 \leq j \leq n \right\}$$

$$= \left\{ \left(1 - \left(1 + 4\theta\alpha\sin\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^{-1} \cdot 4\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right) \,\middle|\, 1 \leq j \leq n \right\}$$

La méthode est donc stable si la plus grande de ces valeurs propres est, en valeur absolue, ≤ 1, c'est-à-dire si et seulement si pour $1 \leq k \leq n$:

$$1 - \underbrace{\left(1+4\theta\alpha\sin^2\right)^{-1}\cdot 4\alpha\sin^2}_{\text{positif donc on sera toujours } \leq 1\,!} \geq -1$$

Donc si $4\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right) \leq 2\left(1+4\theta\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)$

ie $\quad -2 \leq 4(2\theta-1)\,\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)$.

$\quad -1 \leq 2(2\theta-1)\,\alpha\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)$.

On a donc la condition :

* soit $\theta \geq 1/2$
* soit $\theta < 1/2$ et comme $\sin^2 \leq 1$, $2(1-2\theta)\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$.

• Un mot sur la convergence :

On aimerait avoir $\max_j \| u^n - \underbrace{u(t_n, x_j)_j}_{v_n} \| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{\Delta t \to 0} 0$

On peut écrire $v_{n+1} = Bv_n + \varepsilon_n \Delta t$.

d'où $v_{n+1} - u_{n+1} = B(v_n - u_n) + \varepsilon_n \Delta t$.

$$= B^n(v_0 - u_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t\, B^k \varepsilon_k.$$

Mais par hypothèse $v_0 = u_0$

et $\|B\| \leq 1$ par stabilité

$\|\varepsilon_n\| \xrightarrow{\Delta t, \Delta x \to 0} 0$ par consistance

Donc $\|v_n - u_n\| \xrightarrow{\Delta t, \Delta x \to 0} 0$

$$\left(\leq \underbrace{N\Delta t}_{=T} \|\varepsilon_k\|_\infty \right)$$