Differentielle de l'exponentielle matricielle

Leçons 156, 220, 221

Référence Rouvière p. 307

Théorème

$$d\exp(X)\cdot H = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-adX)^k}{(k+1)!} H$$ où E evn, $H \in E$, $X \in \mathcal{L}(E)$.

Résumé

I - Deux équations différentielles :

(1) $f' = Af$ $\quad f(0) = H$

(2) $g' = e^{tA} H$ $\quad g(0) = 0$

II - On admet que exp est $\mathcal{C}^2$ et on pose $g : t \mapsto \partial_{u=0}\left(e^{-tX} e^{t(X+uH)}\right)$.

On a bien $g'(t) = e^{-t\,adX} H$ et $g(0) = 0$ où $ad(X)H = XH - HX$.

III - Conclusion avec la formule qu'on cherchait.

I) • Remarquons que $(e^{tA})' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} = e^{tA} A = A e^{tA}$.

On a donc une solution $e^{tA} \cdot H$ de (1), qui vérifie $f(0) = e^0 \cdot H = H$.

$\rightarrow f = e^{tA} H$.

• Intégrons maintenant l'exponentielle :

$\rightarrow g(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1} A^n}{(n+1)!}\right) \cdot H$

et on a bien $g(0) = 0$.

II) • On suppose que l'exponentielle est $\mathcal{C}^2$, donc la fonction

$$(t,u) \longmapsto e^{-tX} e^{t(X+uH)}$$

est aussi $\mathcal{C}^2$.

Le théorème de Schwarz permet de permuter les dérivations :

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \partial_t \partial_{u=0} \left(e^{-tX} e^{t(X+uH)} \right) \\
&= \partial_{u=0} \partial_t \left(e^{-tX} e^{t(X+uH)} \right) \\
&= \partial_{u=0} \left(-e^{-tX} X e^{t(X+uH)} + e^{-tX} \cdot e^{t(X+uH)} (X+uH) \right) \\
&= \partial_{u=0} \left(u e^{-tX} e^{t(X+uH)} \cdot H \right) \\
&= \partial_{u=0} \left(u e^{-tX} \cdot H \cdot e^{t(X+uH)} \right) \\
&= e^{-tX} H e^{tX}.
\end{aligned}$$

Calculons cela en se ramenant à une équation différentielle.

Posons $f(t) = e^{-tX} \cdot H \cdot e^{tX}$.

On a $f'(t) = -Xe^{-tX} X H e^{tX} + e^{-tX} H \cdot e^{tX} X$

$$= -\operatorname{ad} X (f(t))$$

f vérifie donc $f' = (-\operatorname{ad} X) f$ avec $f(0) = H$.

d'où, d'après I :

$$f(t) = e^{-t\operatorname{ad} X} \cdot H$$

Donc on a bien $g'(t) = e^{-t\operatorname{ad} X} \cdot H$.

III | • On peut donc intégrer g comme on l'a vu en I :

$$g(H) = \partial_{u=0}\left(e^{-X} e^{X+uH}\right)$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\,X)^n}{(n+1)!}\right) H.$$

Mais la fonction exp est différentiable en X, d'où

$$\partial_{u=0}\left(e^{-X} e^{X+uH}\right) = e^{-X}\, d\exp(X)\cdot H.$$

On a donc

$$d\exp(X)\cdot H = e^{X}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\,X)^n}{(n+1)!}\right)\cdot H.$$