THÉORÈME DES EXTREMA LIÉS.

Leçons : 159, 214, 219

Références : Rouvière p. 373

Avez p. 98, p. 103.

Théorème

Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. $(E = \mathbb{R}^n)$.

$g_1, \dots, g_k : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$.

On suppose que pour tout $u \in \mathcal{U}$, $dg_1(u), \dots, dg_k(u)$ sont linéairement indépendants.

Alors l'ensemble des zéros des $g_1, \dots, g_k$ est une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$.

et si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable et présente un extrémum lié en $m \in \mathcal{U}$

sur M, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que

$$df(m) = \lambda_1 dg_1(m) + \dots + dg_k(m).$$

Résumé

I - Lemme : avec les hypothèses du théorème, si $\mathrm{Ker}\, dg_i(m) \subseteq \mathrm{Ker}\, df(m)$,

$df(m)$ est une combinaison linéaire des $dg_i(m)$.

II - $T := \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, dg_i(m) = T_m M$.

III - $T_m M \subseteq \mathrm{Ker}\, df(m)$ et conclusion.

Application :

Théorème spectral par les extrema liés !

I | • Complétons $dg_1, \dots, dg_k$ en une base $(b_1, \dots, b_n)$ de E^*.

et posons $(e_1, \dots, e_n)$ la base duale de E.

• On a $df(m) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.

Mais $\bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\, b_i = \mathrm{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$

d'où $df(m) \cdot e_r = 0 = \lambda_r e_r$ pour $r = k+1$ à n.

- Donc $df(m) = \lambda_1 dg_1(m) + \dots + \lambda_k dg_k(m)$.

II] • $T_m M$ est un espace vectoriel de dimension $n-k$ (par la 1ère définition des sous-variétés.)

- L'intersection $T := \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, dg_i(m)$ est un espace vectoriel de dimension $n-k$, par indépendance linéaire des $dg_i(m)$.

→ il suffit de montrer que $T_m M \subseteq T$ pour avoir l'égalité !

- Soit alors $\gamma : I \to E$ une courbe tracée sur M.

Par définition de M, $g_i(\gamma(t)) = 0$ pour $t \in I$. εM.

Donc la différentielle de cette fonction est nulle en $0 \in I$:

$$dg_i(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = dg_i(m) \cdot \gamma'(0) = 0.$$

Donc $\gamma'(0) \in T$ d'où l'égalité des deux espaces.

III] • Soit $v \in T_m M$,

$\gamma : I \to E$ tracée sur M d'origine m telle que $\gamma'(0) = v$.

- Comme 0 est un extremum de la fonction $f \circ \gamma : I \to E$.

$$0 = \frac{d f\circ\gamma}{dt}(0) = df(\gamma(0))\,\gamma'(0) = df(m) \cdot v.$$

- Cela prouve bien l'inclusion $T_m M \subseteq \mathrm{Ker}\, df$.

Le premier lemme donne alors directement le résultat.

Application Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.

- Posons

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle u(x), x \rangle . \end{array}$$

- f est différentiable et $df(x) \cdot h = \langle u(h), x \rangle + \langle u(x), h \rangle = 2 \langle u(x), h \rangle$.

→ donc f atteint un maximum sur la sphère unité S, car celle-ci est compacte en dimension finie. Notons m le point où ce maximum est atteint.

- Or, être sur la sphère unité S correspond à la contrainte

$$g(x) := \langle x, x \rangle - 1 = 0.$$

Mais on peut calculer $dg(x) \cdot h = \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle = 2 \langle x, h \rangle$.

- Le théorème des extrema liés donne alors

$$df(m) = \lambda \, dg(m)$$

ie $\langle u(m), h \rangle = \lambda \langle m, h \rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

d'où $u(m) = \lambda m$

- De plus, si $\langle y, m \rangle = 0$, on a

$$\langle u(y), m \rangle = \langle y, u(m) \rangle = \lambda \langle y, m \rangle = 0,$$

donc l'espace orthogonal à m est invariant par u, et on peut donc procéder par récurrence sur la restriction de u à cet espace.