# Formule des compléments

Leçons : 265, 236, 239

Ref : Analyse complexe, E. Amar E. Matheron p. 249.

## Théorème

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) \in ]0;1[$, alors

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \text{où } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

## Résumé

I - Pour $\alpha \in ]0;1[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

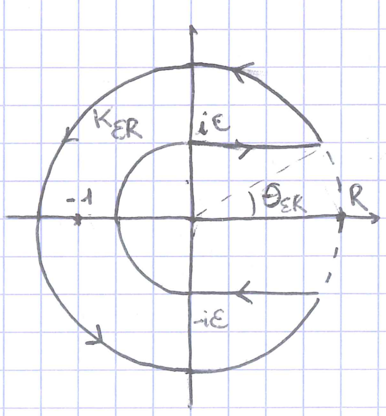
II - Calcul de $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ et conclusion

**I** • Posons $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0;+\infty[$, la fonction suivante est holomorphe sur $\Omega - \{-1\}$ :

$$f : z \longmapsto \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \quad \text{pour } z \in \Omega \setminus \{-1\}. \text{ et } \alpha \in ]0;1[.$$

• Le résidu de $f$ en $-1$ est donc $\operatorname{Res}(f,-1) = \dfrac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$.

• Pour utiliser le théorème des résidus, définissons un compact à bord régulier, dont le bord ne contient pas $-1$.




• Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, définissons $K_{\varepsilon R}$ délimité par :

* le demi cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon,\ Re(z) \leq 0\}$
* les segments $I^+_{\varepsilon R} = [\,i\varepsilon\,;\ i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}\,]$

  $I^-_{\varepsilon R} = [-i\varepsilon\,;\ -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}\,]$
* l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} = \{Re^{i\theta} \mid \theta \in [-\pi;\pi],\ |\theta| \geq \theta_{\varepsilon R}\}$

  où $\theta_{\varepsilon R} = \arcsin \varepsilon/R$.

• Comme $-1 \in \overset{\circ}{K}_{\varepsilon R}$, la formule des résidus donne :

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f(z)dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

• Calculons cette intégrale sur chaque morceau de $\partial K_{\varepsilon R}$.

* sur $C_\varepsilon$ :

$$\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{|z|^\alpha |1+z|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha (1-\varepsilon)} \cdot \pi\varepsilon = \frac{\pi \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon}.$$

donc, pour $\varepsilon \to 0$, cette intégrale tend vers $0$ car $1-\alpha > 0$.

* sur $\Gamma_{\varepsilon R}$, paramétré par $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$ pour $\theta \in [\theta_{\varepsilon R}; 2\pi - \theta_{\varepsilon R}]$ :

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} f(z)dz = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} f(Re^{i\theta})\,\gamma'(\theta)\,d\theta = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i\theta(1-\alpha)}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta.$$

et cette intégrale tend vers $\int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha} \frac{e^{i\theta(1-\alpha)}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ quand $\varepsilon \to 0$, par le théorème de convergence dominée par exemple.

* sur $I^+_{\varepsilon R}$ et $I^-_{\varepsilon R}$, pour $t \in ]0; +\infty[$

- d'abord, $(t \pm i\varepsilon)^\alpha = \left(\sqrt{t^2+\varepsilon^2}\, e^{\pm i \arctan(\pm\frac{\varepsilon}{t})}\right)^\alpha$
$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$ ou $t^\alpha$

- $|f(t+iy)| \leqslant \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ qui est intégrable sur $]0;R[$.

→ le théorème de convergence dominée donne donc :

$$\int_{I^+_{\varepsilon R}} f \longrightarrow \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} \quad \text{et} \quad \int_{I^-_{\varepsilon R}} f = e^{-2i\pi\alpha}\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

• Pour l'instant, on a donc, compte tenu de l'orientation

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f \xrightarrow{\varepsilon\to 0} (1-e^{-2i\pi\alpha})\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + i\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}}{1+Re^{i\theta}} e^{i\theta(1-\alpha)}\,d\theta = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

• Comme, pour $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\left| \frac{R^{1-\alpha}}{1+Re^{i\theta}} e^{i\theta(1-\alpha)} \right| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \quad \text{et } \alpha > 0$$

la deuxième intégrale tend vers 0 quand $R \to +\infty$.

• Et $R \to +\infty$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(1+t)} = \frac{2i\pi e^{-i\pi\alpha}}{1-e^{-2i\pi\alpha}} = \frac{2i\pi}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

II. • On va utiliser le principe des zéros isolés :

si pour tout $\alpha \in ]0;1[$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$, alors, $]0;1[$ admettant un point d'accumulation dans $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < Re(z) < 1\}$, les deux fonctions seront égales. (car elles sont holomorphes).

• Le théorème de Fubini donne, pour $0 < \alpha < 1$ :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{\alpha-1} e^{-t} s^{-\alpha} e^{-s} \, dt \, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} e^{-t-s} \, ds \, \frac{dt}{t}$$

On peut alors faire le changement de variables $(u,v) = \left(s+t, \frac{t}{s}\right)$ car $\varphi : (t,s) \longmapsto (s+t, t/s)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U$ sur $U$ dont l'inverse est $(u,v) \longmapsto \left(\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v}\right)$

Et le jacobien de $\varphi^{-1}$ est :

$$\begin{vmatrix} v/_{1+v} & u/_{(1+v)^2} \\ 1/_{1+v} & -u/_{(1+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{uv+u}{(1+v)^3} = -\frac{u}{(1+v)^2} = -\frac{t}{v(1+v)}$$

• D'où

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} v^{\alpha} e^{-u} \cdot \frac{-\cancel{u}}{v(1+v)} \cdot \frac{1}{\cancel{u}} \, du\, dv$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} e^{-u} \, dv\, du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^{1-\alpha}(1+v)} \, dv$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi(1-\alpha))} \quad \text{(lemme } \pm\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$