Processus de Galton - Watson

Leçons : 226, 229, 260, 264

Références : Probabilités pour les non probabilistes, Walter Appel.

Exercices de probabilités, Marie Cottrell p.72.

Théorème

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$.

On considère les variables aléatoires $(X_i^n)_{n\geq 0, i\geq 1} \overset{iid}{\sim} \mu$.

Le processus de Galton-Watson est défini par les variables $(Z_n)_{n\geq 0}$:

$$Z_0 = 1 \qquad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n.$$

En posant $m = \mathbb{E}(\mu) > 0$, on a trois cas possibles :

- $m>1$ (sur-critique) et $\mathbb{P}(\exists n, Z_n=0) = 0$
- $m<1$ (sous-critique) et $\mathbb{P}(\exists n, Z_n=0) = 1$.
- $m=1$ (critique) $\rightarrow$ si $\mu(1) = 1$, $\mathbb{P}(\exists n, Z_n=0) = 0$
  $\rightarrow$ sinon, $\mathbb{P}(\exists n, Z_n=0) = 1$.

Interprétation

On a un individu au début, il a des descendants selon μ.

À chaque étape, on a une nouvelle génération : tout le monde meurt et laisse $X\sim\mu$ enfants derrière lui.

On regarde dans ce développement quand la dynastie s'éteint.

Résumé

I – Étude de l'événement M : "la dynastie finit par s'éteindre."

LEMME II – Étude de la fonction génératrice G_n de Z_n.

III – Recherche des points fixes de G_1.

I] Remarquons que si il existe $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = 0$, alors $Z_{m \geq n} = 0$.

- L'événement M est donc l'union croissante des $\{Z_n = 0\}$ pour $n \geq 0$.
- En posant $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ pour $n \geq 0$, on obtient alors :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \to +\infty} x_n =: \alpha.$$

Cette limite existe car $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée.

II] • Montrons que la fonction génératrice G_n de Z_n vérifie :

$$G_{n+1} = G \circ G_n \qquad \text{pour } n \geq 1$$

Avec $G_1 = G$, la fonction génératrice de μ.

On a en effet, pour $t \in [0,1]$,

$$G_{n+1}(t) = \mathbb{E}\left(t^{Z_{n+1}}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(t^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{N=0}^{+\infty} t^{\sum_{i=1}^{N} X_i^n} \mathbb{1}_{Z_n = N}\right)$$

Fubini-Tonelli $\longrightarrow$ $$= \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{N} t^{X_i^n} \mathbb{1}_{Z_n = N}\right)$$

indépendance $\longrightarrow$ $$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) \prod_{i=1}^{N} \underbrace{\mathbb{E}\left(t^{X_i^n}\right)}_{= G(t)}$$

$$= \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n = N) G(t)^N$$

$$= G_n \circ G(t)$$

- De plus, $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$, et :

$$x_{n+1} = G_{n+1}(0) = G_n \circ G(0) = G \circ G_n(0) = G(x_n).$$

III) · Pour $t \in [0;1[$, on a :

· $G'(t) = \sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}(Z_1 = k) t^{k-1}$ · $G''(t) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) \mathbb{P}(Z_1 = k) t^{k-2}$

· On a donc pour $t \in [0;1[$:

→ $G'(t) > 0$ si $\mathbb{P}(X=0) \neq 1$.

→ $G''(t) \geq 0$. ⟶ donc G est convexe BORDEL !

· Ainsi, si l'on a un point fixe β de G, on a :

→ $x_{n+1} = G(x_n)$ car $x_n = G_n(0)$.

→ donc on a $\alpha = G(\alpha)$.

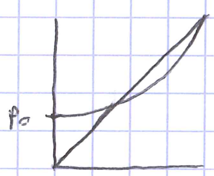
→ et on a $x_1 = \mathbb{P}(X=0) = G(0) < G(\beta) = \beta$ si $p(X=0) \neq 1$.

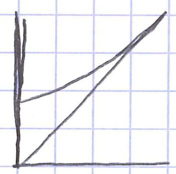
d'où $x_{n+1} = G(x_n) < G(\beta) = \beta$.

Donc pour tout point fixe de G, $\alpha \leq \beta$ par passage à la limite.

· Il ne reste plus qu'à tracer G pour conclure :

→ si $m > 1$ → si $m < 1$





on a $\alpha < 1$ on a $\alpha = 1$

→ si $m = 1$, alors :

→ soit $\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1$ alors $\mathbb{P}(X=1) = 1$ et $\alpha = 0$.

→ soit $\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) < 1$, alors il existe $k \geq 2$ tq $\mathbb{P}(X=k) > 0$

et $G''(t) > 0$ donc G reste au dessus de la première bissectrice et on a $\alpha = 1$.