DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SERIE HARMONIQUE

Leçons 223, 224, 230

Référence FGN Analyse 1 p. 156

Théorème

Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

On montre que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Résumé

I - Posons $u_n = H_n - \ln(n)$, $v_n = u_n - 1/n$. Ces deux suites sont adjacentes, ce qui donne le terme constant.

II - D'autres termes du développement asymptotique !

I

- On a par définition $u_n - v_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.
- u_n est décroissante car :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\leq 0 \quad \text{car } \ln(1+x) \leq x \text{ pour } x > -1. \end{aligned}$$

- v_n est croissante car :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \cancel{\frac{1}{n+1}} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\geq 0 \quad \text{car } \ln(1+x) \leq x. \end{aligned}$$

En fait, on doit remarquer avant de poser v_n que ce terme $-\frac{1}{n}$ c'est un miracle des propriétés du log :

$$-1/n \leq -\ln(1 + 1/n) = \ln(1 - 1/(n+1)) \leq -1/(n+1).$$

On peut donc dire que u_n et v_n sont adjacentes et convergent donc vers un réel γ, la constante d'Euler.

Et même $\gamma > 0$ car $v_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} = 1 - \ln 2 > 0$

et $\gamma \geq v_2$

II) On va choper deux autres termes du développement asymptotique !

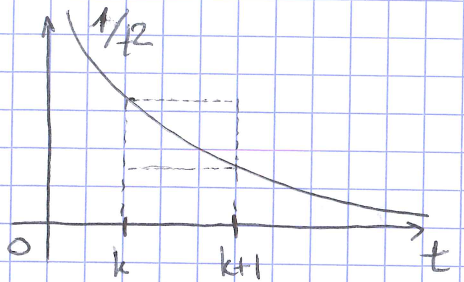
- Posons $t_n = H_n - \ln(n) - \gamma$.

Regardons la différence

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

La série des $\frac{1}{n^2}$ converge, on peut donc sommer les équivalents sur les restes de la série :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (t_k - t_{k-1}) = -t_n \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$



Comparons avec une intégrale !

$$\int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$$

Donc $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^2 \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

Or $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \left[-\frac{1}{\alpha - 1} t^{-\alpha+1}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Donc les intégrales de gauche et de droite sont équivalentes à $\frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} 1/k^2 \sim \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{n}$.

On a donc

$$-t_n \sim -\frac{1}{2n} \quad \text{soit } t_n \sim \frac{1}{2n}$$

Donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- Un terme de plus ?

Soit $w_n = H_n - \ln(n) - \gamma - \frac{1}{2n}$.

On a encore $-w_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_n - w_{n-1}$

or $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2}$.

$$= \cancel{\frac{1}{n}} + \left(-\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right)$$

$$= -\cancel{\frac{1}{2n^2}} - \frac{1}{3n^3} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n}\left(\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{6n^3}$$

On peut alors sommer et comparer avec une intégrale, ce qui donne :

$$w_n = -\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_n - w_{n-1} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6n^3} \sim \frac{1}{12n^2}.$$

Donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.