Intégrale de Dirichlet et Fourier.

Leçons 236, 2~~4~~8, 250

Référence Faraut, Calcul Intégral p. 98 p. 134 puis p. 135 ou p. 155

Théorème

- On montre que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$
- Puis que si f est intégrable sur $[0;T]$ a une limite $f(0_+)$ en 0, et qu'il existe K et x_0 tels que pour $0<x<x_0$, $|f(x)-f(0_+)| \leq Kx$, alors:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^T f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \frac{\pi}{2} f(0_+).$$

- Puis, selon la leçon, on montre

→ si f est intégrable et a des limites à gauche et à droite en x, et qu'il existe $\eta, M>0$ tels que $0<h<\eta$ implique

$$|f(x+h)-f(x_+)| \leq Mh \quad \text{et} \quad |f(x-h)-f(x_-)| \leq Mh$$

alors $\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{ixt} \hat{f}(t)dt \xrightarrow{A \to +\infty} \frac{1}{2}\left(f(x_+)+f(x_-)\right)$

→ si f est périodique de période T intégrable sur tout intervalle borné, et a des limites à gauche et à droite en x, et qu'il existe K, h_0 tels que si $0<h<h_0$: $|f(x+h)-f(x_+)| \leq Kh$ et $|f(x-h)-f(0_-)| \leq Kh$

alors $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \xrightarrow{N \to +\infty} \frac{1}{2}\left(f(x_+)+f(x_-)\right)$

I • Posons $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} dx$.

① Déjà, on a $\left| e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-\lambda x}$ si $x \geq 1$ et continue sinon donc F est bien définie pour $\lambda > 0$.

② De plus, on a : $\left| \frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\right) \right| = \left| -x \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} \right| \leq e^{-\lambda x}$ intégrable.

on en déduit que

$$F'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \sin x \, e^{-\lambda x} dx = \left[\left(\frac{1}{1+\lambda^2} \cos x + \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \sin x \right) e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{1+\lambda^2}$$

③ qui donne

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + C.$$

Or $|F(\lambda)| = |C - \arctan\lambda| < \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \to +\infty} 0$

d'où $C = \pi/2$.

On a donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\lambda \to 0} F(\lambda) = \frac{\pi}{2}$.

II • Écrivons, pour $0 < \eta < T$:

$$\int_0^T f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx - \frac{\pi}{2} f(0_+)$$

$$= \underbrace{\int_0^{\eta} (f(x) - f(0_+)) \frac{\sin(\lambda x)}{x} dx}_{I_1(\eta,\lambda)} + \underbrace{\int_{\eta}^{T} \frac{f(x)}{x} \sin \lambda x \, dx}_{I_2(\eta,\lambda)} - \underbrace{\int_{\eta}^{+\infty} f(0_+) \frac{\sin \lambda x}{x} dx}_{I_3(\eta,\lambda)}$$

On a alors, pour $0 < \eta < x_0$:

$$|I_1(\eta,\lambda)| \leq \int_0^{\eta} \underbrace{|f(x) - f(0_+)|}_{K\eta} \cdot \underbrace{\left| \frac{\sin(\lambda x)}{x} \right|}_{\simeq 1 \text{ (et borné en tout cas)}} dx \leq K\eta^2$$

$$\int_1^T \frac{f(x)}{x} \sin \lambda x \, dx \xrightarrow{\lambda \to +\infty} 0$$ par le lemme de Riemann-Lebesgue.

Et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_{\lambda 1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 0$

D'où le résultats

III | Pour la transformée de Fourier

$$\int_{-A}^{A} e^{ixt} \hat{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-A}^{A} e^{i(x-y)t} dt \right) f(y) dy$$ d'après Fubini.

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Ay}{y} \left(f(x+y) + f(x-y) \right) dy$$

car $\int_{-A}^{A} e^{i(x-y)t} dt = \left[\frac{1}{i(x-y)} e^{i(x-y)t} \right]_{-A}^{A} = \frac{1}{i(x-y)} \cdot 2i \sin(x-y)$

et on obtient le résultat par changement de variable.

Puis le théorème précédent donne

$$\int_{-A}^{A} e^{ixt} \hat{f}(t) dt \xrightarrow{A \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \left(f(x+) + f(x-) \right)$$

Pour la série de Fourier

On pose $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{i \frac{2\pi}{T} nx} = \frac{\sin\left(2\pi\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{x}{T}\right)}{\sin\left(\pi \frac{x}{T}\right)}$

le noyau de Dirichlet

Cela donne alors

$$S_N f(x) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} D_N(y) f(x-y)\,dy$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} D_N(y)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(f(x-y)+f(x+y)\right)dy$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T}(N+\frac{1}{2})y\right)}{y}\cdot\underbrace{\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi y}{T}\right)}\cdot\frac{1}{2}\left(f(x+y)+f(x-y)\right)}_{g(y)}dy$$

On peut alors appliquer le théorème à g :

$$S_N f(x) \xrightarrow{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(f(x_+)+f(x_-)\right)$$