INEGALITÉS DE KOLMOGOROV.

Leçons 228.

Références Gourdon, Analyse p.83

FGN analyse 1

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \geq 2)$.

$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ $\quad 0 \leq k \leq n$.

On suppose que M_0 et M_n ont des valeurs finies.

Alors tous les M_k, $0 \leq k \leq n$ sont finis et on a l'inégalité

$$M_k \leq 2^{k(m-k)/2} M_0^{1-k/m} M_m^{k/m} \quad \text{pour} \quad \begin{array}{l} 1 \leq m \leq n \\ 0 \leq k \leq m \end{array}$$

Résumé

I – Les M_k sont finis.

II – $M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$

III – La formule trop pétée

I • Posons $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_{n-1}$, la formule de Taylor-Lagrange donne c_i tel que $x < c_i < x + h_i$

$$f(x+h_i) = f(x) + h_i f'(x) + \cdots + \frac{h_i^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h_i^n}{n!} f^{(n)}(c_i)$$

On peut réécrire cet ensemble d'égalités sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & h_1 & \cdots & h_1^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & h_{n-1} & \cdots & h_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{pmatrix} f'(x) \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{X(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x+h_1) - f(x) + \frac{f^{(n)}(c_1)}{n!} \\ \vdots \\ f(x+h_{n-1}) - f(x) + \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!} \end{pmatrix}}_{B(x)}$$

On a donc un système $MX(x) = Y(x)$.
où M est une matrice de Vandermonde avec des coefficients distincts
donc M est inversible !

Dès lors, $X \longrightarrow M^{-1}X$ est une application continue, donc il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\|Y(x)\| = \|M^{-1}X(x)\| \leq \alpha \|X(x)\|.$$

Mais par hypothèse, $X(x)$ est borné donc Y l'est aussi !

II) • On peut écrire, pour $h > 0$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_+) \qquad c_+ \in]x, x+h[$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(c_-) \qquad c_- \in]x-h, x[$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h)\right) + \frac{h}{4}\left(f''(c_-) - f''(c_+)\right)$$

soit $|f'(x)| \leq \frac{1}{2h} \cdot 2M_0 + \frac{h}{4} \cdot 2M_2$

On a donc $M_1 \leq \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$.

$\longrightarrow$ le membre de droite est minimal pour $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$

$\Longrightarrow$ ce qui donne $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

III) Montrons le résultat par récurrence sur m.

$m=1$ $\quad M_k \leq 2^{k(1-k)} \cdot M_0^{1-k} M_1^{k}$ $\quad$ évident

$m=2$ $\quad M_k \leq 2^{k(1-k)/2} M_0^{1-k/2} M_2^{k/2}$ $\quad$ $k=0$ ou 2 évident
$k=1$ conséquence de II.

- Supposons maintenant le résultat vrai à un rang m.

On peut appliquer $\underline{II}$ à la fonction $f^{(m-1)}$ et obtenir :

$$M_m \leq \sqrt{2 M_{m-1} M_{m+1}}$$

(1) Donc

$$M_m^2 \leq 2 M_{m-1} M_{m+1}$$
$$\leq 2 \cdot 2^{(m-1)(\cancel{m}-\cancel{m}+1)/2} \cdot M_0^{1-\frac{m-1}{m}} \cdot M_m^{\frac{m-1}{m}} \cdot M_{m+1}.$$

Dès lors,

* soit $M_m = 0$ mais alors f est polynomiale de degré $< m$ ce qui donne la propriété

* soit on peut regrouper les M_m à gauche :

$$(*) \quad M_m^{1+\frac{1}{m}} \leq 2^{\frac{m+1}{2}} M_0^{\frac{1}{m}} M_{m+1}$$

Cela donne le résultat pour $k = m+1$.

Maintenant si $k \leq m$, par hypothèse :

$$M_k \leq 2^{k(m-k)/2} \, M_0^{1-k/m} \cdot M_m^{k/m}$$

On peut donc utiliser $(*)$ pour remplacer $M_m^{k/m}$ (puissance $k/_{m+1}$ dans $(*)$)

$$M_k \leq 2^{\frac{k(m-k)}{2}+\frac{k}{2}} \cdot M_0^{1-k/m+k/m(m+1)} M_{m+1}^{k/m+1}$$
$$= 2^{k(m+1-k)/2} \cdot M_0^{1-k/m+1} M_{m+1}^{k/m+1}.$$