MÉTHODE DE LAPLACE

Leçons 228, 239, 224

Référence Rouvière p. 339 (ex 113)

Théorème

Soit $[a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non)

$\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$.

$f : [a,b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ est intégrable sur $[a,b[$ pour un certain t_0.

On suppose f continue en a et $f(a) \neq 0$.

Posons $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx$, et on cherche un équivalent :

- Si $\varphi' > 0$ sur $[a,b[$, $F(t) \sim \frac{1}{\varphi'(a)} \cdot \frac{\exp(-t\varphi(a)) f(a)}{t}$
- si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$:

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{\exp(-t\varphi(a)) f(a)}{\sqrt{t}}.$$

Application : formule de Stirling

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t \, dx \sim \sqrt{2\pi t}\; t^t \exp(-t).$$

Résumé

I - Étude de deux cas particuliers significatifs : $\varphi = x$ et $\varphi = x^2$.

II - Généralisation aux deux cas généraux du théorème.

III - Application à la formule de Stirling.

Ce qu'on va montrer, c'est en fait qu'on peut couper le développement de Taylor :

$f(t) \simeq f(a)$ et $\varphi(x) \simeq \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a)$ voire $\varphi(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\varphi''(a)$.

et que cela a des répercussions retentissantes sur F, où toute la masse est concentrée au début par l'exponentielle.

On va supposer que $t_0 = 0$ pour simplifier les calculs.

I] • f est continue à l'origine donc il existe $M>0$ et $\alpha \in]0,b[$ tels que :

$$\forall x \in [0;\alpha] \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Dès lors, pour $\varphi : x \mapsto x$

$$* \int_0^\alpha e^{-tx} f(x)\,dx = \int_0^{t\alpha} e^{-u} f(u/t)\,\frac{du}{t} \sim \frac{f(0)}{t}$$

car le théorème de convergence dominée s'applique :

- la fonction est intégrable en u
- et elle est bornée par Me^{-u} pour tous u, t.

$$* \left|\int_\alpha^b e^{-tx} f(x)\,dx\right| \leqslant e^{-t\alpha}\int_\alpha^b |f(x)|\,dx$$

qui tend vers 0 de façon exponentielle et est donc négligeable devant $1/t$.

De même, pour $\varphi : x \mapsto x^2$

$$* \int_0^\alpha e^{-tx^2} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-u^2} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)\frac{du}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} f(0)e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} f(0)$$

on conclut par convergence dominée

et par négligence de l'autre partie de l'intégrale.

II] • On va faire un changement de variable pour se ramener au cas i) traité :

$$x \mapsto y = \varphi(x) - \varphi(a) : [a,b[\to [0,c[\text{ en } \mathcal{C}^1 \text{ diff. d'inverse } \psi.$$

On a :
$$F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\,dx$$
$$= \int_0^c e^{-t\varphi(a)} e^{-ty} f(\psi(y))\,\psi'(y)\,dy$$
$$\sim e^{-t\varphi(a)} \frac{f(\psi(0))\,\psi'(0)}{t}$$

Et la conclusion vient de $\psi(0) = a$ et $\psi'(0) = 1/\varphi'(a)$

Dans le deuxième cas, on procède de façon similaire :

$$x \mapsto y = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)} : [a, b[\longrightarrow [0, c[$$

Remarquons que $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$

et $\varphi''(a) > 0$

Dès lors $$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}}}_{>0 \text{ pour } x > a.} \sim \frac{(x-a)\varphi''(a)}{2\sqrt{\frac{1}{2}(x-a)^2\varphi''(a)}} = \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}} > 0 \text{ en } x = a$$

Donc $x \mapsto y$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'inverse ψ et on a :

$$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \int_0^c e^{-ty^2} f(\psi(y))\, \psi'(y)\, dy$$

$$\sim e^{-t\varphi(a)} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} f(\psi(0))\, \psi'(0)$$

$$\sim e^{-t\varphi(a)} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \cdot \frac{f(a)}{\sqrt{t}}.$$

III| • La fonction $x \mapsto e^{-x} x^t$ a pour dérivée $(-x^t + t x^{t-1}) e^{-x}$ et est donc maximale en $x = t$.

On va se ramener au cas où son maximum est en 0 :

$$\Gamma(t+1) \underset{x = (1+u)t}{=} \int_{-1}^{+\infty} e^{-(1+u)t} ((1+u)t)^t \, t \, du$$

$$= \int_{-1}^{+\infty} t^{t+1} e^{-\varphi(u)t} du \quad \text{où } \varphi(u) = 1 + u - \ln(1+u).$$

On a ensuite

$$\int_{-1}^{0} e^{-t\varphi(u)} du = \int_0^{+1} e^{-t\varphi(-u)} du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(u)} du \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}$$

Des lors on obtient :

$$\Gamma(t+1) \sim t^t e^{-t} \cdot \sqrt{2\pi t}$$

D'où la formule de Stirling !