THÉORÈME DE LIAPOUNOV

Leçons : 220, 221, 208

Références Rouvière p. 130 (ex. 46)

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
Si la matrice $Df(0)$ n'a que des valeurs propres de partie réelle < 0, alors l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel

(S) $\quad y' = f(y) \quad$ avec $y(0) = x$

Remarque : on ramène l'étude d'un système non linéaire à l'étude d'un système linéaire en montrant que notre approximation est raisonnable.

Résumé

I – Étude du système linéaire $z' = Df(0) z$.

i. il existe un polynôme P tel que
$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|e^{tA} x\| \leq P(|t|) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t \operatorname{Re} \lambda_j} \right) \|x\|$. où $\operatorname{Sp} Df(0) = \{\lambda_i\}$

ii. on en déduit le comportement asymptotique de z.

II – Étude du vrai système : soit y une solution

i. $q(y)' = -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$ où $r(y) = f(y) - Ay$
et il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que
$$q(y) < \alpha \implies -\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \leq -\beta q(y)$$

ii. puis $q(x) < \alpha \Rightarrow q(y(t)) \leq \alpha$ pour tout $t \geq 0$
et $q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$

I| i. D'après le lemme des noyaux on peut écrire tout $x \in \mathbb{C}^n$ ainsi :

$$x = x_1 + \dots + x_k \qquad \text{où} \quad x_j \in E_j = \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$$

On a alors

$$e^{tA} x_j = e^{t\lambda_j} \cdot e^{t(A-\lambda_j I_n)} x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I_n)^p \right) x_j$$

Pour une norme quelconque de $\mathbb{C}^n$ on a alors :

$$\begin{aligned} \|e^{tA} x\| &\leq \sum_{j=1}^{k} \|e^{tA} x_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} e^{t \mathrm{Re} \lambda_j} C_j (1+|t|)^{m_j - 1} \|x_j\| \\ &\leq C (1+|t|)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t \mathrm{Re} \lambda_j} \right) \max_j \|x_j\| \end{aligned}$$

pour des constantes $(C_i)_i$, C bien choisies.

par équivalence des normes, on a le résultat car $\|x\|_\infty \leq C' \|x\|$.

ii. La solution du système linéarisé est $z(t) = e^{tA} x$.

On a donc :

$$\|z(t)\| \leq C (1+|t|)^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \underbrace{e^{t \mathrm{Re} \lambda_j}}_{\leq e^{-ta}} \|x\|$$

pour a tel que $\mathrm{Re}\, \lambda_j \leq -a$.

$$\leq P(|t|)\, e^{-ta} \|x\|. \quad \text{où } P \in \mathbb{C}[X].$$

donc $z(t) \to 0$ exponentiellement et l'origine est un point d'équilibre attractif.

II| i. Remarquons que $b(x,y) = \int_0^{+\infty} (e^{tA} x \cdot e^{tA} y)\, dt$ est :

- bien définie car $|e^{tA} x \cdot e^{tA} y| \leq \|e^{tA} x\| \cdot \|e^{tA} y\| \leq C^2 e^{-2at} \|x\| \|y\|$.
- bilinéaire et symétrique
- et $q(x) := b(x,x)$ est définie positive.

• Dès lors, prenons une solution y de (S), on a

$$\begin{aligned} q(y)' &= Dq(y)y' \\ &= 2b(y,y') \quad \text{car } q(x+y) = q(x) + 2b(x,y) + q(y) \\ &= 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y)) \\ &= -2\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \end{aligned}$$

• Ce qui invite à majorer :

$$|b(y, r(y))| \leqslant \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$$ par Cauchy-Schwarz pour la norme $x \mapsto \sqrt{q(x)}$

Mais on a

$$r(y) = f(y) - f(0) - Df(0)y \quad (= o(\|y\|))$$

$\underbrace{\text{donc, il existe}}_{\text{pour tout } \varepsilon>0}$ $\alpha > 0$ tel que si $q(y) \leqslant \alpha$ alors $\sqrt{q(r(y))} \leqslant \varepsilon\sqrt{q(y)}$

ie $\|y\|_q \leqslant \alpha \implies \|r(y)\|_q \leqslant \varepsilon \|y\|_q$.

On a donc, pour $q(y) \leqslant \alpha$

$$\begin{aligned} q(y)' &= -2\|y\|^2 + 2b(y, r(y)) \\ &\leqslant -2C\|y\|_q^2 + 2\varepsilon\|y\|_q^2 \\ &\leqslant -\beta q(y) \quad \text{pour } \beta = -(-2C + 2\varepsilon) = 2C - 2\varepsilon > 0 \text{ si } \varepsilon \text{ petit.} \end{aligned}$$

ii Mais que vaut la condition $q(y) \leqslant \alpha$?

• Si $q(x) < \alpha$ au début ça reste vrai ensuite

Ah bon? $\longrightarrow$ • sinon, il existe un t_0 minimal tel que $q(y(t_0)) = \alpha$, et on a alors

$q(y)'(t_0) \leqslant -\beta q(y(t_0)) < 0$ donc on a un $t_0' < t_0$ tel que $q(y(t_0')) \leqslant \alpha$ ce qui contredit la définition de $t_0 \rightarrow$ absurde.

Donc y vérifie l'inéquation différentielle :

$$q(y)' \leqslant -\beta q(y).$$

Ce qui se résout ainsi :

$$\left(e^{\beta t} q(y)\right)' = e^{\beta t}\left(q(y)' + \beta q(y)\right) \leq 0.$$

donc $q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$ pour $t \geqslant 0$ car $y(0) = x$.

donc $y(t) \longrightarrow 0$ exponentiellement !