Méthode de Newton.

Leçons : 223, 226.

Références : Petit guide de calcul diff, François Rouvière. p. 142.

Théorème

Soit $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose $c < d$, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in [c,d]$.

On considère la suite récurrente :

$$x_{n+1} = F(x_n) \text{ pour } n \geq 0, \quad \text{avec } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors f s'annule en un unique point $a \in [c,d]$ et :

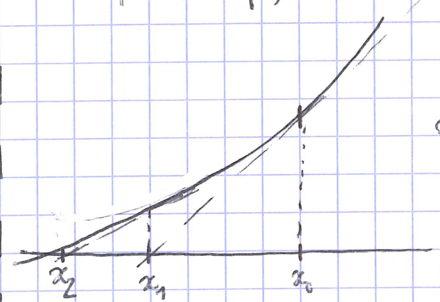
(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha ; a+\alpha]$ est stable par F, et pour $x_0 \in I$, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge quadratiquement vers a.

(ii) Si, de plus, pour tout $x \in [c,d]$, $f''(x) > 0$, alors pour tout $x_0 \in [a,d]$, $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante ou constante, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ pour un certain C.

$$x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2 \quad \text{pour } x_0 > a.$$

Heuristique

À chaque étape, on cherche en fait le zéro de la tangente à la courbe :



L'équation de la tangente en x_n est :

$$0 = y = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

D'où $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = F(x_n)$.

Résumé

0 - Montrer que f a un unique zéro sur $[c,d]$.

I - Utiliser la formule de Taylor pour obtenir une relation entre $|x_{n+1}-a|$ et $|x_n-a|$.

II - En déduire que $|x_n - a| \leq (C\gamma)^{2^n}$ pour $\gamma<1$.

III - Si de plus f est convexe ($f''>0$), c'est optimal.

0) • f est continue et monotone car $f'(x)>0$ sur $[c,d]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $0 \in [f(c), f(d)]$, f s'annule une fois sur $[c,d]$, en $\underline{a}$.

I) • On a : $F(a) = a$

$$F'(a) = 1 - \frac{f'(a)^2 - f(a)f''(a)}{f'(a)\times f'(a)} = 0.$$

Rmq On s'attend à avoir $F(x)-a$ de l'ordre de $(x-a)^2$.

• La formule de Taylor donne $z\in[c,d]$ tel que :

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(z).$$

Soit, comme $f'(x)\neq 0$:

$$\frac{1}{f'(x)}\big(\underbrace{f(a)}_{=0} - f(x)\big) + x - a = \frac{(x-a)^2}{2}\,\frac{f''(z)}{f'(x)}$$

$$F(x) - a = \frac{(x-a)^2}{2}\,\frac{f''(z)}{f'(x)}$$

(1) • D'où $|F(x)-a| \leq C|x-a|^2$ avec $C = \dfrac{\max|f''|}{2\min f'}$.

II) • Prenons $\alpha>0$ tel que $C\alpha<1$

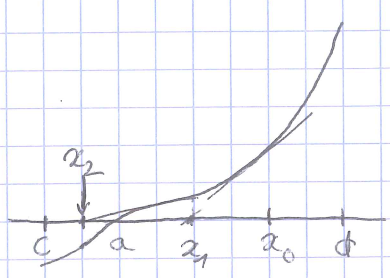
et $I = [a-\alpha ; a+\alpha] \subseteq [c,d]$.

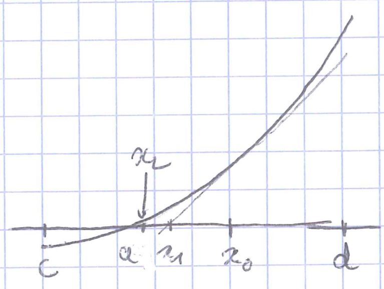
• Remarquons que si $x\in I$, $|F(x)-a| \leq C\alpha^2 \leq \alpha$
donc I est stable par F d'où, d'après (1) :

(2) $$C|x_n - a| \leq (C|x_{n-1}-a|)^2 \leq (C|x_0-a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}.$$

Comme $C\alpha<1$, on a bien une convergence d'ordre 2 de x vers a.

III • Comme la fonction f est convexe, ça se passe encore mieux :





En effet : $[a;d]$ est ici stable par F : pour $x \in [a,d]$

$\rightarrow$ $F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} \geqslant 0$ $\quad (z \in]a,x[)$.

$\rightarrow$ $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x \leqslant d$.

- La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite décroissante à valeurs dans $[a,d]$ si $x_0 \in [a;d]$.

- Elle converge donc vers une limite l qui vérifie :

  $F(l) = l$ soit $f(l) = 0$.

  D'où $l = a$. (c'est le seul zéro de f).

- On a alors, comme dans I, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F(x_n) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} (x_n - a)^2 \quad \text{avec } a \leqslant z_n \leqslant x_n.$$

Donc $z_n \xrightarrow{n \to +\infty} a$ et $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} a$.

D'où $x_{n+1} - a \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.