Formule sommatoire de Poisson + Shannon

Leçons 246, 250

Référence Bernis, p. 253

Théorème

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction de l'espace de Schwartz.

On montre d'abord que pour $t \in \mathbb{R}$, (formule de Poisson)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) \exp(2in\pi t).$$

Puis on l'applique en supposant le support $\hat{f}$ inclus dans un segment de la forme $[-F, F]$, où $2F \leq 1$: pour $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \operatorname{sinc}((n-t)\pi) \quad \text{où} \quad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}.$$

I • On s'intéresse à $g : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t)$, et pour en faire quelque chose (en particulier avoir la convergence de sa série de Fourier !) on a besoin de montrer qu'elle est bien définie, $\mathcal{C}^1$ et périodique.

• g est bien définie : montrons sa convergence normale sur tout compact.

→ Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $K \subseteq [-N, N]$.

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}.$$

d'où $$f(t+n) \leq \frac{M}{1+(t+n)^2} = \frac{M}{1+t^2+nt+n^2} \underset{t \in K}{\leq} \frac{M}{1+N^2+|n|N+|n|^2}$$

cette série converge donc $\sum f(n+t)$ converge normalement

Notons que l'on peut faire exactement le même calcul pour $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, elle est en particulier $\mathcal{C}^1$, et on a :

* $\sum f(n+t)$ converge
* $\sum f'(n+t)$ converge uniformément sur tout compact.

$\longrightarrow$ g est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

de plus, un changement d'indice donne sa 1-périodicité.

On a donc, par le théorème de convergence normale de Dirichlet :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(g) \exp(2i k\pi t) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

Calculons ce coefficient de Fourier !

$$c_k(g) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) \right) \exp(-2i\pi k t)\, dt.$$

La convergence normale de g permet de permuter sans problème.

On va ensuite regarder les sommes partielles pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=-N}^{n=N} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n+t) \exp(-2i\pi k t)\, dt = \sum_{n=-N}^{N} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(t) \exp(-2i\pi k(t-n))\, dt$$

$$= \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} f(t) \exp(-2i\pi k t)\, dt$$

car la fonction exp est $2i\pi$-périodique !

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient donc

$$c_k(g) = \hat{f}(k).$$

Et c'est sympa parce que ça donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \exp(+2i\pi kt)$$

$\underline{\text{II}}$ • La transformée de Fourier envoie la classe de Schwartz sur elle même, on peut donc appliquer la formule qu'on vient de démontrer :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k+\xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{f}}(k) \exp(2i\pi k\xi)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) \exp(2i\pi k\xi)$$

par la formule d'inversion de la TF dans la classe de Schwartz.

• On suppose le support de $\hat{f}$ inclus dans $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, donc pour $k \neq 0$, $\hat{f}(k+\xi)$ est nul pour $\xi \in [-1/2; 1/2]$

$$\text{D'où } \hat{f}(\xi) = \mathbb{1}_{[-1/2;1/2]} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k+\xi)$$
$$= \mathbb{1}_{[-1/2;1/2]} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k) \exp(2i\pi k\xi).$$

→ on a donc fait le lien entre la TF de f, son support et tout ce qu'on a calculé avant !

Comme on veut un résultat sur f, calculons :

$$f(t) = \hat{\hat{f}}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \exp(2i\pi\xi t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1/2;1/2]}(\xi) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(n) \exp(2i\pi\xi(k+t))\, d\xi$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} f(n) \exp(2i\pi\xi(t-n))\, d\xi$$

on inverse l'ordre de sommation

car la fonction f converge normalement, et que l'exponentielle complexe est de module 1.

On n'a plus qu'à calculer :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \exp(2i\pi\xi(t-n))\, d\xi = \left[\frac{1}{2i\pi(t-n)} \exp(2i\pi\xi(t-n))\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}$$

D'où la formule, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(t-n)).$$