# LA FONCTION D'ACKERMANN N'EST PAS PRIMITIVE RÉCURSIVE

Leçon 912

Référence Cori Lascar tome 2 p. 18-22

Dehornoy (maths de l'info) p. 190.

**Théorème**

La fonction d'Ackermann, définie par $A(n,m) := A_n(m)$, où

$$A_0(m) = m+1$$
$$A_{n+1}(0) = A_n(1)$$
$$A_{n+1}(m+1) = A_n(A_{n+1}(m))$$

n'est pas primitive récursive.

**Résumé**

I - Résultats préliminaires :

- Croissances de $m \mapsto A_n(m)$
  $n \mapsto A_n(m)$
- $m+1 \leq A_n(m)$.
- $km \leq A_2^k(m)$
- $A_k(A_n(m)) \leq A_{\max(k,n)+2}(m)$.

II - Preuve que les fonctions récursives primitives sont majorées par $A_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

III - Preuve par l'absurde que la fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive.

I] • Croissances :

* $A_n(m+1) \geq A_n(m)$

$\to n=0$ : $A_0(m+1) = m+2 \geq m+1 = A_0(m)$.

$\to n$ fixé $A_{n+1}(m+1) = A_n(A_{n+1}(m)) \geq A_{n+1}(m)$.

* $A_{n+1}(m) \geq A_n(m)$

$\to m=0$ : $A_{n+1}(0) = A_n(1) \geq A_n(0)$

$\to m$ fixé : $A_{n+1}(m+1) = A_n(A_{n+1}(m)) \geq A_n(m+1)$

• On voit qu'on a usé et abusé de $A_n(m) \geq m+1$.

$\to n=0$ : $A_0(m) = m+1$

$\to n$ fixé : $A_{n+1}(0) = A_n(1) \geq 1$

$A_{n+1}(m+1) = A_n(A_{n+1}(m)) \geq A_{n+1}(m)+1 \geq m+2$

• On a aussi envie de se débarasser de trucs du type $A_n(km)$, donc on va montrer que $km \leq A_2^k(m)$

$\to k=1$ : $A_2(m) \geq 2m+3 \geq m$

$\to k$ fixé : $A_2^{k+1}(m) = A_2^k(A_2(m))$

$= A_2^k(2m+3)$

$\geq 2km+3k$

$\geq (k+1)m$.

• Enfin, pour $s = \max(k,n)$ :

$A_k \circ A_n(m) \leq A_s \circ A_{s+1}(m)$

$= A_{s+1}(m+1)$

$\leq A_{s+2}(m)$

Et on a utilisé ici une dernière inégalité : $A_n(m+1) \leqslant A_{n+1}(m)$.

$\rightarrow$ $m = 0$ $\quad A_n(1) = A_{n+1}(0)$

$\rightarrow$ $m$ fixé $\quad A_n(m+2) = A_{n-1}(A_n(m+1))$

$$\leqslant A_n(A_n(m+1))$$

$$\leqslant A_n(A_{n+1}(m)) \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= A_{n+1}(m+1)$$

II | • Montrons que les fonctions récursives primitives sont bornées par un certain $A_n$, $n$ donné, par induction :

- $zero(n) = 0 \leqslant A_0(n)$
- $succ(n) = n+1 \leqslant A_0(n)$
- $proj_i(n_1, \dots, n_k) = n_i \leqslant A_0(n_1 + \dots + n_k)$.

- Schéma de composition :

soit $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ bornée par $A_n$

$g_1, \dots, g_k : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ bornées chacune par $A_{n'}$.

On suppose sans perte de généralité que $n \geqslant n'$.

Alors pour $\vec{x} \in \mathbb{N}^p$, on a :

$$f(g_1, \dots, g_k)(\vec{x}) \leqslant A_n(k\, A_{n'}(s)) \quad \text{où } s = x_1 + \dots + x_k.$$

$$\leqslant A_n(A_2^k(A_{n'}(s)))$$

$$\leqslant A_{n+2(k+1)}(s)$$

- Schéma de récurrence :

soit $f(0, \vec{x}) = g(\vec{x})$

$f(m+1, \vec{x}) = h(f(m, \vec{x}), m, \vec{x})$

où $g$ et $h$ sont bornées par $A_n$ et $A_{n'}$.

On a alors

- $f(0,\vec{x}) = g(\vec{x}) \leqslant A_n(s)$

- supposons que pour $m$ fixé, $f(m,\vec{x}) \leqslant A_k(m+s)$.

alors on a

$$
\begin{aligned}
f(m+1,\vec{x}) &= h(f(m,\vec{x}), m, \vec{x}) \\
&\leqslant A_{n'}(A_k(m+s)+m+s) \\
&\leqslant A_{n'}(A_2(A_k(m+s))). \\
&\leqslant A_{n'+2}(A_k(m+s)) \quad \text{en supposant } n' \geqslant 2. \\
&\leqslant A_{k-1}(A_k(m+s)) \quad \text{en supposant } n'+2 \leqslant k-1. \\
&= A_k(m+1+s)
\end{aligned}
$$

III) • Supposons maintenant la fonction d'Ackermann primitive récursive.

Alors $\varphi(m) = A(m,m+1)$ l'est aussi.

Il existe donc $k$ tel que

$$\varphi(m) \leqslant A_k(m)$$

On a alors

$$\varphi(k) = A(k,k+1) = A_k(k+1) \leqslant A_k(k)$$

ce qui est absurde !