Théorie des Ordres Denses.

Leçons : 914, 918, 924.

Référence : David Nour Raffali (DNR) p. 130

Théorème

- La théorie des ordres T_0 est écrite sur le langage $\mathcal{L}_0 = \{<, =\}$ avec les axiomes :

(Θ_1) $\forall x, y \quad \neg\{x < y \wedge y < x\}$
(Θ_2) $\forall x, y, z \quad \{x < y \wedge y < z \to x < z\}$
} ordre strict

(Θ_3) $\forall x, y \quad \{x < y \vee x = y \vee y < x\}$ } ordre total

(Θ_4) $\forall x, y \, \exists z \quad \{x < y \to x < z \wedge z < y\}$ } ordre dense

(Θ_5) $\forall x \, \exists y \quad \{x < y\}$
(Θ_6) $\forall x \, \exists y \quad \{y < x\}$
} sans plus petit/grand élément.

- Remarques : Les modèles de T_0 sont infinis (pas de plus grand élément)
  ne sont pas tous isomorphes ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$)
  existent (T_0 non contradictoire)

- La théorie T_0 est complète et décidable.

Résumé

I - Théorème d'élimination des quantificateurs (admis) et lemme associé.

II - T_0 admet l'élimination des quantificateurs (par le lemme)

i - enlever les négations des atomes de la formule

ii - écrire la formule sous forme disjonctive et décrire les atomes.

iii - "distribuer" les $\exists$ et étudier les conjonctions d'atomes

I] **Théorème** (admis) : Soit T une théorie qui admet l'élimination des quantificateurs. Si pour tout A formule atomique close, $T \vdash A$ ou $T \vdash \neg A$, alors T est complète.
De plus, si T est récursive sur un langage au plus dénombrable, alors T est décidable.

Lemme T admet l'élimination des quantificateurs si pour toute formule sans quantificateurs $F[x, x_1, \dots, x_n]$ il existe une formule sans quantificateurs $G[x_1, \dots, x_n]$ telle que

$$T \vdash \forall x_1, \dots, x_n \, (\exists x F \leftrightarrow G).$$

Preuve : On peut écrire F en n'utilisant que $\exists$, $\vee$ et $\neg$.
Par récurrence sur la taille de F il existe une formule G telle que

$$VL(G) \subseteq VL(F) \quad \text{et} \quad T \vdash F \leftrightarrow G.$$

En effet, pour $\vee$ et $\neg$ il n'y a pas de problème, regardons le $\exists$: c'est exactement l'hypothèse du lemme.

II] • En remplaçant les formules de la forme $A \to B$, $\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \vee B)$ et $\neg\neg A$ par leurs homologues $\neg B \vee A$, $\neg A \vee \neg B$, $\neg A \wedge \neg B$ et A, puis en distribuant les $\wedge$, on peut réécrire la formule $F[x, x_1, \dots, x_n]$ sous la forme disjonctive :

$$\bigvee_k \bigwedge_\ell H_{k\ell}$$

• Décrivons la forme des $H_{k\ell}$, en remarquant que

$$T_0 \vdash \neg(x = y) \leftrightarrow x < y \vee y < x$$

$$T_0 \vdash \neg(x < y) \leftrightarrow x = y \vee y < x$$

on peut donc supposer qu'il n'y a pas de négation dans $H_{k\ell}$.

- M_{kl} est donc de la forme :

$$x = x \mid x = x_i \mid x_i = x_j \mid x_i < x_j$$
$$\mid x_i < x \mid x < x_i \mid x < x \mid \top \mid \bot .$$

- On peut éliminer $x=x$, $x<x$, $x_i = x_i$, $x_i < x_i$ qui sont équivalentes à $\top$ ou $\bot$.

- Mais on peut aussi éliminer $\top$ et $\bot$ car :

$$\vdash \top \wedge A \leftrightarrow A \quad \text{et} \quad \vdash \bot \wedge A \leftrightarrow \bot$$

- Enfin $\vdash \exists x\, A \vee B \leftrightarrow \exists x\, A \vee \exists x\, B$, il suffit qu'une des formules $\exists x \bigwedge_r K_k$ puisse être écrite sans quantificateur.

où les K_r sont de la forme :

$$x = x_i \mid x_i = x_j \mid x_i < x_j \mid x_i < x \mid x < x_i$$

- Distinguons plusieurs cas :

  * si K contient un $x = x_i$, $\exists x K$ équivaut à $K[x := x_i]$
  * sinon, on peut écrire la formule équivalente à $\exists x K$:

$$K_1 \wedge \exists x K_2 = \left(\bigwedge_n K_{1,m}\right) \wedge \left(\exists x \bigwedge_m K_{2,m}\right)$$

où K_1 contient les formules atomiques de la forme $x_i = x_j$, $x_i < x_j$.

et K_2 celles de la forme $x < x_i$, $x_i < x$

Il existe alors des ensembles d'indices I, J tels que K_2 équivaut à

$$\exists x \left[\left(\bigwedge_{i \in I} x < x_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in J} x_j < x\right)\right]$$

Dès lors : × si $I \cap J \neq \emptyset$, la formule équivaut à $\bot$

× sinon, si $I \neq \emptyset$ et $J \neq \emptyset$, la formule équivaut à

$$\bigwedge_{i \in I, j \in J} x_j < x_i \quad \text{par densité de l'ordre.}$$

× si $I = \emptyset$ ou $J = \emptyset$, la formule équivaut à $\top$ par (Θ_5) et (Θ_6).

On a donc bien vérifié les hypothèses du lemme, donc T_0 admet l'élimination des quantificateurs, et comme $\mathcal{L}_0$ est fini,

T_0 est complète et décidable.