UNE INVOLUTION EST UNE BIJECTION

Leçons 918 + LOIS DE MORGAN

Références

Théorème

On va montrer deux choses

I - Lois de Morgan : pour A et B deux formules du premier ordre :

$$\neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B).$$

II - Une involution est une bijection

I] • Cherchons à démontrer le résultat dans le formalisme du calcul des séquents LK, par double implication.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,ax}{A \vdash A, B}\,aff_d}{A \vdash A \vee B}\,\vee_d}{\neg(A\vee B), A \vdash}\,\neg_g}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A}\,\neg_d \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,ax}{B \vdash A, B}\,aff_d}{B \vdash A \vee B}\,\vee_d}{\neg(A\vee B), B \vdash}\,\neg_g}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B}\,\neg_d}{\dfrac{\neg(A\vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}{\vdash \neg(A \vee B) \longrightarrow \neg A \wedge \neg B}\,\rightarrow_d}\,\wedge_d$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,ax}{\neg A, A \vdash}\,\neg_g}{\neg A, \neg B, A \vdash}\,aff_g \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,ax}{\neg B, B \vdash}\,\neg_g}{\neg A, \neg B, B \vdash}\,aff_g}{\neg A, \neg B, A \vee B \vdash}\,\vee_g}{\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash}\,\wedge_g}{\dfrac{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)}{\vdash \neg A \wedge \neg B \longrightarrow \neg(A \vee B)}\,\rightarrow_d}\,\neg_d$$

II] • On a besoin de l'égalité, pour cela on doit rajouter

→ l'élimination de l'égalité à gauche et à droite

$$\dfrac{\Gamma \vdash A[x:=t] \wedge (t=u), \Delta}{\Gamma \vdash A[x:=u], \Delta}\, =_d \qquad \dfrac{\Gamma, A[x:=t] \wedge (t=u) \vdash \Delta}{\Gamma, A[x:=u] \vdash \Delta}\, =_g$$

→ l'introduction de l'égalité comme axiome :

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash t=t}\, ax$$

où t et u sont des termes du langage.

• Soit f un symbole d'arité 1, on peut définir

→ f est une involution : $Inv(f) = \forall x\ ffx = x$

→ f est injective : $Inj(f) = \forall x \forall y\ fx = fy \to x = y$

→ f est surjective : $S(f) = \forall y \exists x\ fx = y$

→ f est bijective : $B(f) = Inj(f) \wedge S(f)$.

• Si l'on trouve des dérivations pour $Inv(f) \vdash Inj(f)$ et $Inv(f) \vdash S(f)$, on a montré le résultat car :

$$\dfrac{\dfrac{Inv(f) \vdash Inj(f) \qquad Inv(f) \vdash S(f)}{Inv(f) \vdash Inj(f) \wedge S(f)}\, \wedge_d}{\vdash Inv(f) \to Inj(f) \wedge S(f)}\, \to_d$$

• Puis $Inv(f) \to S(f)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{ffy=y \vdash ffy=y}\, ax}{Inv(f) \vdash ffy=y}\, \forall_g\ (y/x)}{Inv(f) \vdash \exists x\ fx=y}\, \exists_d\ (fy/x)}{Inv(f) \vdash S(f)}\, \forall_d}{\vdash Inv(f) \longrightarrow S(f)}\, \to_d$$

• Enfin, $\mathrm{Inv}(f) \longrightarrow \mathrm{Inj}(f)$

$$A = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x=ffx \vdash x=ffx}\,ax}{\mathrm{Inv}\,f \vdash x=ffx}\,\forall_g}{\mathrm{Inv}\,f,\, fx=fy \vdash x=ffx}\,aff_g$$

$$B_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{y=ffy \vdash y=ffy}\,ax}{\mathrm{Inv}\,f \vdash y=ffy}\,\forall_g}{\mathrm{Inv}\,f,\, fx=fy \vdash y=ffy}\,aff_g$$

$$B_2 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{f(x)=fy \vdash ffy=ffy}\,ax \qquad \dfrac{}{fx=fy \vdash fx=fy}\,ax}{fx=fy \vdash (fz=ffy)[z:=fy] \wedge (fx=fy)}\,\wedge_d}{fx=fy \vdash ffx=ffy}\,=_d}{\mathrm{Inv}\,f,\, fx=fy \vdash ffx=ffy}\,aff_g$$

$$B = \dfrac{\dfrac{B_1 \qquad B_2}{\mathrm{Inv}\,f,\, fx=fy \vdash (y=z)[z:=ffy] \wedge ffx=ffy}\,\wedge_d}{\mathrm{Inv}\,f,\, fx=fy \vdash y=ffx}\,=_d$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \qquad B}{\mathrm{Inv}\,f,\, fx=fy \vdash x=ffx \wedge y=ffx}\,\wedge_d}{\mathrm{Inv}\,f \vdash fx=fy \to (x=z)[z:=ffx] \wedge (y=ffx)}\,\to_d}{\mathrm{Inv}\,f \vdash fx=fy \longrightarrow x=y}\,=_d}{\mathrm{Inv}\,f \vdash \mathrm{Inj}\,f}\,\forall_d,\forall_d$$

C'est encore un peu court comme ça, on peut montrer la commutativité de l'égalité après l'avoir introduite :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash y=y}\,ax}{x=y \vdash y=y} \qquad \dfrac{}{x=y \vdash x=y}\,ax}{x=y \vdash (y=z)[z:=x] \wedge x=y}\,\wedge_d}{x=y \vdash y=x}\,=_d}{\vdash x=y \longrightarrow y=x}\,\to_d}{\vdash \forall x\, \forall y\;\; x=y \longrightarrow y=x}\,\forall_d\forall_d$$