Théorème de Rice

<u>Leçons</u> 914

<u>Références</u> LFCC, Carton p.160-162.

Introduction à la calculabilité, Wolper.

<u>Théorème</u>

Toute propriété non triviale des langages récursivement énumérables est indécidable

= accepté par une machine de Turing

<u>Résumé</u>

Définissons le langage

$$L_\in = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \}$$

"M accepte w".

I - Soit P une propriété, le langage

$$L_P = \{ \langle M \rangle \mid L(M) \text{ satisfait } P \}$$

se réduit au langage $L_\in$.

II - $L_\in$ est indécidable

<u>I</u> • Quitte à remplacer P par $\overline{P}$, on peut supposer que le langages vide ne vérifie pas P.

• Comme P n'est pas triviale, il existe une machine de Turing N telle que L(N) vérifie P.

• Posons M une machine de Turing et w un mot, définissons une machine $M' = f(M, w)$ telle que :

Soit x l'entrée.

Si M accepte w :

. Simuler N sur x et retourner le résultat.

Sinon rejeter

- On associe ainsi $\langle M' \rangle$ à $\langle M, w \rangle$, telle que :
  - si M accepte w, alors $L(M') = L(N)$
    ie. $L(M')$ vérifie P
  - si M rejette w, alors $L(M') = \emptyset$
    ie. $L(M')$ ne vérifie pas P.
- En somme : M accepte w si et seulement si $L(M')$ vérifie P.
- Donc on a bien réduit $L_\in$ à L_P, $\langle M' \rangle$ étant calculable.

II] • On a $L_\in \leq_m L_P$, mais ça serait bien qu'il soit indécidable pour conclure...

- Pour rappel, $L_\in = \{ \langle M, w \rangle \mid w \in L(M) \}$.
- Supposons par l'absurde que $L_\in$ est décidable : il existe alors une machine de Turing A telle que $L_\in = L(A)$ qui s'arrête sur toute les entrées.
- Construisons une machine Q qui encode A en dur telle que :

Sur une entrée $\langle M \rangle$,
  Si A accepte $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ alors rejeter
  Sinon accepter

- Lançons Q sur $\langle Q \rangle$:

→ Si Q accepte $\langle Q \rangle$, alors A accepte $\langle Q, \langle Q \rangle \rangle$ par définition de A.
mais alors Q rejette $\langle Q \rangle$ ...

→ Si Q rejette $\langle Q \rangle$, alors A rejette $\langle Q, \langle Q \rangle \rangle$ par définition de A.
mais alors Q accepte $\langle Q \rangle$ ...

- Dans les deux cas il y a une contradiction, donc
  $L_\in$ est indécidable

Donc L_P est indécidable.

Remarque : il s'agit bien ici d'une propriété sur le langage d'une machine, et pas sur les machines elles mêmes.

Par exemple :

$L(k) = \{ \langle M \rangle \mid M$ s'arrête en au plus k étapes$\}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

est décidable, car il suffit de compter k étapes et de regarder si M s'est arrêtée ou non.