VOYAGEUR DE COMMERCES EUCLIDIEN

Leçons 925, 928.

Références Cormen p. 978

Théorème

Soit G un graphe complet à $n \in \mathbb{N}$ sommets
w une fonction de poids sur les arêtes de G.
k un entier positif.

(VC) Existe-t-il un chemin visitant chaque sommet exactement une fois, finissant sur le sommet de départ, dont la somme des poids des arêtes empruntées est au plus k.

I - (VC) est NP-complet

II - Si w vérifie l'inégalité triangulaire, il existe un algorithme d'approximation avec une garantie de performance 2 à temps polynomial pour le problème (VC)

III - Si $P \neq NP$ et sans l'inégalité triangulaire, il n'existe aucun algorithme d'approximation polynomial et à garantie de performance $\rho \geq 1$ pour (VC)

I • VC $\in$ NP : étant donné un chemin, il suffit de vérifier
- qu'il passe par tous les sommets une fois et revient au départ
- que son poids est plus petit que k. (on l'appelle aussi coût)

Ce qui se fait en temps polynomial.

• VC est NP-difficile : montrons que CYCLE-HAM $\leq_p$ VC.

Soit $G=(S,A)$ une instance de CYCLE-HAM.

Définissons $G'=(S,A')$, où $A' = \{(i,j) : i,j \in S \text{ et } i \neq j\}$.

Définissons la fonction de poids w par :

$$w(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \in A \\ 1 & \text{si } (i,j) \notin A \end{cases}$$

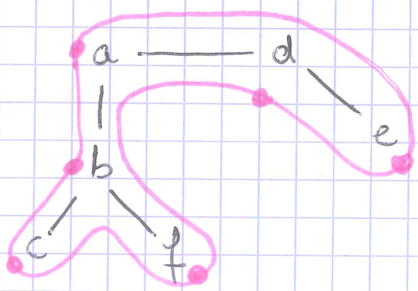
- Trouver une solution à VC de poids au plus zéro revient alors à trouver un cycle hamiltonien :
  - si h est un cycle hamiltonien de G, h est une tournée de G' de poids nul
  - si h' est une tournée de G' de poids au plus zéro, chacune de ses arêtes ayant un poids nul, elle doit donc avoir un poids nul. Donc h' ne contient que des arêtes de A, c'est donc un cycle hamiltonien de G.

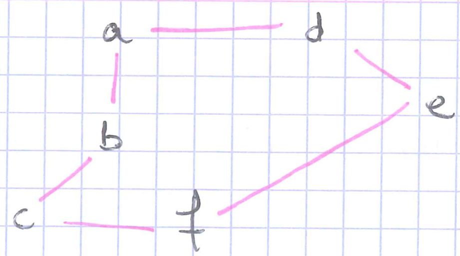
$\Rightarrow$ CYCLE-HAM $\leq_p$ VC donc VC est NP-complet.

II] · Définissons l'algorithme suivant, pour $G=(S,A)$:

- sélectionner une racine $r \in S$
- calculer un arbre couvrant minimal T pour G depuis r.
- le parcours préfixe de T définit un chemin hamiltonien H

$\rightarrow$ renvoyer H.





$\rightarrow$ le parcours préfixe visite exactement une fois chaque sommet, en l'ignorant lors de sa seconde rencontre.

+ l'algorithme s'exécute en temps polynomial car on peut construire l'arbre couvrant minimal en temps polynomial.

- On définit ainsi une 2-approximation polynomiale.

→ en enlevant une arête d'une tournée H^* optimale, on obtient un arbre couvrant, les poids $C(T)$ et $C(H^*)$ vérifient donc

$$C(T) \leq C(H^*).$$

→ le parcours complet W associé au parcours préfixe de T passe exactement deux fois par chaque sommet, d'où

$$C(W) \leq 2C(T)$$

d'où $C(W) \leq 2C(H^*)$.

→ de plus, si l'on supprime la deuxième occurence des sommets dans W, on peut relier ceux qui sont autour (G est complet) et le poids de cette arête est inférieur à celui des arêtes enlevées (par inégalité triangulaire), on a donc :

$$C(H) \leq 2C(H^*).$$

III • Supposons qu'il existe un algorithme B polynomial qui renvoit une p-approximation de VC.

On peut arrondir p et donc le supposer entier.

- B permet de résoudre CYCLE-HAM en temps polynomial.

- soit $G=(S,A)$ une instance de CYCLE-HAM.

posons $G' = (S, A')$ où $A' = \{(i,j) : i,j \in S \quad i \neq j\}$

$$w(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in A \\ p|S|+1 & \text{si } (i,j) \notin A. \end{cases}$$

G' peut être construit en temps polynomial à partir de G.

- si G a un cycle Hamiltonien, (G', w) a une tournée de coût $|S|$.
- sinon, une tournée de (G', c) coûte au moins $p|S| + |S|$ car on emprunte au moins une arête de coût $p|S|+1$.

- comme B est une ρ-approximation;
  - → si G a un cycle hamiltonien, B renvoit ce cycle car c'est le seul à avoir un coût inférieur à $\rho|S|$.
  - → sinon il renvoit un cycle de coût supérieur strictement à $\rho|S|$.

- On peut donc résoudre CYCLE-HAM en temps polynomial, ce qui contredit $P \neq NP$.